

brikkerne til  
regning & matematik

# formler og ligninger

F+E+D

UENIO

preben bernitt

**brikkerne**

til

regning & matematik

**formler og ligninger, F+E+D**

ISBN: 978-87-92488-09-1

1. Udgave som E-bog

© 2010 by bernitt-matematik.dk

Kopiering er kun tilladt efter aftale med bernitt-matematik.dk.

Læs nærmere om dette på

[www.bernitt-matematik.dk](http://www.bernitt-matematik.dk)

eller kontakt nedenstående adresse.

DEMO

**[bernitt-matematik.dk](http://bernitt-matematik.dk)**

[mail@bernitt-matematik.dk](mailto:mail@bernitt-matematik.dk)

Fjordvej 6

4300 Holbæk

## Forord

Hæftet er et af ni, der er udarbejdet til undervisning på VUC på niveauerne **F+E+D** og dette indeholder blandt andet *kernestoffet*, som det er beskrevet om ligninger i undervisnings-vejledningen om trin **D**. Hæfterne til **D** er opbygget således, at udover at indøve kemestoffet vil man også få styrket de forskellige matematiske *kompetencer* :

I dette hæfte arbejdes med kompetencerne *ræsonnement* og *præsentation*. På side 4 og 6 om regler for omdannelse af formler, står en henvisning til Appendix på side 18 til 19, hvor man kan læse om ræsonnementer for nogle af reglerne, samt nogle overvejelser om forskellen på skriftlig og mundtlig *præsentation* af ræsonnementer.

Løsnings metoder til løsning af to ligninger med to ubekendte er medtaget, fordi disse anvendes i andre af hæfternes arbejde med ræsonnementer.

Dette er en *beta-udgave*, der er udarbejdet med baggrund i den vejledning om undervisning på VUC, der udkom i 2009. I forhold til de faglige krav, der viser sig at blive stillet ved de fremtidige skriftlige prøver efter trin D kan der være fag-indhold, der mangler og der kan være fag-indhold, der senere viser sig ikke er være relevant.

[bernitt-matematik.dk](http://bernitt-matematik.dk) fralægger sig ethvert ansvar for eventuelle følger af at anvende hæftet.

Ved eksempler vises det, hvordan man bearbejder ligninger i forskellige situationer og fagudtryk forklares. Derefter er der opgaver man skal løse.

Man behøver ikke løse alle opgaverne: Hvis man har forstået eksemplerne og kan se, at man uden problemer kan løse opgaverne kan man springe dem over.

På side 16 og 17 er en facitliste. Dér kan man se om man regner rigtigt.

## Omdannelse af formler

### Eksempel 1:

Formlen herunder er lavet til at udregne prisen på en taxatur, hvis man ved hvor lang turen er.

Turens længde i km: L

Prisen for en taxatur i kr.: P

$$P = 10L + 20$$

Du vil omdanne formelen så den bliver god til at finde ud af, hvor langt man kan køre for en bestemt pris.

$$P = 10L + 20$$

$$P - 20 = 10L + 20 - 20$$

$$P - 20 = 10L$$

$$(P - 20) : 10 = 10L : 10$$

$$(P - 20) : 10 = L$$

$$L = (P - 20) : 10$$

### Forklaring:

Formler er fremstillet til at være god til at regne den ting ud, der står inden lighedstegnet - i eksemplet prisen for en taxatur. Ved at bruge regnereglerne til løsning af ligninger kan man omdanne en formel så den bliver god til at regne de andre ting ud der indgår i formelen.

Regneregler om ligninger:

Man må:

- lægge det samme til på begge sider af lighedstegnet.
- trække det samme fra
- gange med det samme
- dividere med det samme
- uddrage den samme rod
- opløfte med den samme potens
- ombytte de to udtryk på hver sin side af lighedstegnet.

Regnereglerne bruges sådan at man opnår at få det ønskede bogstav til at stå alene på den vestre side af lighedstegnet.

Læs eventuelt mere om løsning af ligninger på side 18.

### 1 Se formelen herunder:

Pris med moms:  $P_{incl}$

Pris uden moms:  $P_{excl}$

Ved en momsprocent på 25 gælder:

$$P_{incl} = 1,25P_{excl}$$

- Brug formelen til at finde, hvad en vare kommer til at koste med moms, hvis den uden moms koster 240 kr.
- Omdan formelen så den bliver god til at finde prisen uden moms, hvis du kender prisen med moms.
- Brug den omdannede formel til at finde prisen uden moms, hvis prisen med moms er 1200 kr.

### 2 Se formelen herunder:

Pris for mobiltelefon pr. måned:  $P$

Taletid i minutter i en måned:  $t$

$$P = 1,50t + 235$$

- Brug formelen til at finde hvad det koster at have mobiltelefonen i en måned hvor du taler 120 minutter.
- Omdan formelen så den bliver god til at finde, hvor længe du kan tale, når du ved hvor meget du har råd til at betale.
- Brug den nye formel til at finde hvor længe du kan tale for 500 kr.

### 3 Se formelen herunder:

Indtægt ved slag af obligation:  $I$

Obligationens påtrykte værdi:  $P$

Kurs:  $k$

$$I = kP - 55$$

- Omdan formelen så den bliver god til at finde kursen

### 4 Se formlerne herunder:

$$y = 2x + 4$$

$$y = x - 5$$

$$y = 3x - 6$$

- Omdan formlerne så  $x$  kommer til at stå alene.

### **Eksempel 2:**

Formlen herunder kan bruges til at beregne et trapez areal, hvis man kender længden på de to parallelle sider og afstanden mellem dem.

Længden af de parallelle sider: a og b

Afstanden mellem dem: h

Arealet: A

$$A = \frac{1}{2}h(a + b)$$

Du vil omdanne formelen så den bliver god til at beregne længden af den ene side i et trapez, hvor man kender længden af den anden side, højden og arealet.

$$A = \frac{1}{2}h(a + b)$$

$$A = \frac{1}{2}h \cdot a + \frac{1}{2}h \cdot b$$

$$A - \frac{1}{2}h \cdot b = \frac{1}{2}h \cdot a + \frac{1}{2}h \cdot b - \frac{1}{2}h \cdot b$$

$$A - \frac{1}{2}h \cdot b = \frac{1}{2}h \cdot a$$

$$2 \cdot (A - \frac{1}{2}h \cdot b) = 2 \cdot \frac{1}{2}h \cdot a$$

$$2 \cdot (A - \frac{1}{2}h \cdot b) = h \cdot a$$

$$2 \cdot (A - \frac{1}{2}h \cdot b) : h = h \cdot a : h$$

$$2 \cdot (A - \frac{1}{2}h \cdot b) : h = a$$

$$a = 2 \cdot (A - \frac{1}{2}h \cdot b) : h$$

### **Forklaring:**

I formelen i eksemplet indgår en parentes og en brøk.

Man fjerner parenteser ved at bruge følgende regler:

- parenteser med minus foran:  
når parentesen fjernes skal alt i parentesen ændre fortegn.
- parenteser med plus foran:  
kan fjernes uden at foretage ændringer.
- Parenteser med gange eller division:  
Alt i parentesen skal ganges eller divideres med det der står udenfor parentesen.

Læs mere på side 19 om disse regler.

Man fjerner brøker sådan:

- gang med et tal på begge sider af lighedstegnet.  
Tallet skal være valgt sådan at brøkernes nævnere går op i tallet.

## 1 Se formelen herunder:

Indestående på bankkonto efter rentetilskrivning: I

Forrentet beløb: K

Rentesats i %: r

$$I = K(1 + r)$$

- Omdan formelen så den bliver god til at udregne det forrentede beløb.
- Brug den nye formel til at finde hvor stort et beløb man skal have forrentet for at få et indestående på 10.000 kr. ved en rentesats på 10%.

## 2 Se formelen herunder:

Tid i minutter for kogning af 1 liter vand: T

El-kedels effekt i kilowatt: E

Vandets begyndelses temperatur: t

$$T = 0,068 \cdot (100 - t) : E$$

- Omdan formelen så den bliver god til at regne begyndelsestemperaturen ud.
- Brug den nye formel til at regne begyndelsestemperaturen ud for 1 liter vand der blev bragt til at koge på 2 minutter med en el-kedel med en effekt på 3 kilowatt.

## 3 Se formlerne herunder:

$$y = 2(x - 3)$$

$$y = (3x + 2) : 4$$

- Omdan formlerne så x kommer til at stå alene.

## 4 Se formlerne herunder:

$$y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$$

$$y = \frac{3}{4}x - a$$

- Omdan formlerne så x kommer til at stå alene.

## To ligninger med to ubekendte

### Eksempel 1:

Du skal finde de to tal  $x$  og  $y$  der gør følgende ligninger sandfærdige:

$$2x - 3y = 5 \quad \text{og} \quad y + 2x = 1$$

Du gør sådan:

$$2x - 3y = 5 \quad \text{og} \quad y + 2x - 2x = 1 - 2x$$

$$2x - 3y = 5 \quad \text{og} \quad y = 1 - 2x$$

$$2x - 3(1 - 2x) = 5 \quad \text{og} \quad y = 1 - 2x$$

$$2x - 3 + 6x = 5 \quad \text{og} \quad y = 1 - 2x$$

$$8x - 3 = 5 \quad \text{og} \quad y = 1 - 2x$$

$$8x - 3 + 3 = 5 + 3 \quad \text{og} \quad y = 1 - 2x$$

$$8x = 8 \quad \text{og} \quad y = 1 - 2x$$

$$x = 1 \quad \text{og} \quad y = 1 - 2x$$

$$x = 1 \quad \text{og} \quad y = 1 - 2 \cdot 1$$

$$x = 1 \quad \text{og} \quad y = -1$$

### Forklaring:

En ligning med to ubekendte har uendelig mange løsninger: til hvert tal man sætter ind på den ene ubekendtes plads kan man finde et tal, der passer ind på den andens plads.

Har man to ligninger med de to ubekendte kan man finde en fælles løsning ved at benytte metoden i eksemplet:

- Først isoleres den ene ubekendte i den ene ligning. I eksemplet er det ligningen til højre der er nemmest at bruge.
- I anden linie står en beskrivelse af  $y$  som derefter indsættes i stedet for  $y$  i den venstre ligning.
- Nu er den venstre ligning blevet til en ligning med kun én ubekendt.
- Den løses.
- Løsningen indsættes i den højre ligning så  $y$  kan findes.



**1** Se ligningerne herunder.

$$x + 2y = 4 \text{ og } 3x = y - 2$$

- Løs ligningerne ved at bruge følgende fremgangsmåde:
  - Isolér  $x$  i ligningen til venstre
  - Indsæt beskrivelsen af  $x$  på  $x$ -s plads i den højre ligning.
  - Løs den højre ligning og find dermed  $y$ .
  - Indsæt  $y$ -s værdi i den venstre ligning og find dermed  $x$

**2** Se ligningerne herunder:

$$3y + 4 = 2x \text{ og } 2x - y = 4$$

- Vælg den af ligningerne som du synes det vil være nemmest at isolere  $x$  eller  $y$  og løs derefter ligningerne.

**3** Løs ligningerne herunder.

- $3x - 4 = 2y - 3$  og  $-2x - y = 4$
- $4 - 2x = y + 1$  og  $3x = 2y + 8$
- $3x - 8 = 2y - 5$  og  $x + y = 6$
- $4x - 3y = 8 - y$  og  $2x = 3y - 6$

**4** Løs ligningerne herunder:

- $2x - \frac{1}{2}y = 6$  og  $x - 3 = y$
- $\frac{1}{2}x - 2y = 5$  og  $3x = 2y - 5$
- $-x + 2y = 3y$  og  $x = 2y - 3$
- $5 = x + y$  og  $3x - y = 5x$

**5** Løs ligningerne herunder.

- $8 - x = 2y$  og  $2x - 3y = 2$
- $\frac{1}{2}x - 3 = 2y$  og  $y - 3x = 4$
- $6 = 4 - x$  og  $y = 3x$
- $3x = 2y - 4$  og  $x = y$

### Eksempel 2:

Du skal her se en anden metode til løsning af to ligninger med to ubekendte. Metoden kaldes: lige store koefficienters metode.

Koefficienter er fagudtrykket for de tal, der står foran de ubekendte. Metoden går ud på, at man forlænger ligningene sådan at f. eks. kvotienten til  $x$  bliver den samme i begge ligninger. Dernæst trækkes de to ligninger fra hinanden, hvorved der dannes en ligning med kun ubekendt, der løses.

$$x - 3y = 4\frac{1}{2} \quad \text{og} \quad 2y + 2x = 1$$

Man gør sådan:

$$\begin{array}{lcl} (1) & x - y & = 4\frac{1}{2} \\ (2) & 2 \cdot x - 2 \cdot 3y & = 2 \cdot 4\frac{1}{2} \\ (3) & 2x - 6y & = 9 \\ (4) & \underline{2y + 2x} & = \underline{1} \\ (5) & 2x - 6y - (2y + 2x) & = 9 - 1 \\ (6) & 2x - 6y - 2y - 2x & = 8 \\ (7) & -8y & = 8 \\ (8) & y & = -1 \\ (9) & x - 3 \cdot (-1) & = 4\frac{1}{2} \\ & x + 3 & = 4\frac{1}{2} \\ & x & = 7\frac{1}{2} \end{array}$$

$x = 7\frac{1}{2}$  og  $y = -1$  er løsning til begge ligninger.

### Forklaring:

I linie (2) forlænges den første ligning, så koefficienten til  $x$  også bliver 2 i denne.

I linie (3) og (4) står de ligninger parat til at blive trukket fra hinanden.

Dette sker i linie (5) - (7), hvorefter  $y$  findes i linie (8).

I linie (9) indsættes  $y$ -værdien i den oprindelige første ligning og  $x$  findes.

- 1 Løs et passende antal af opgaverne på side 9 med de lige koefficienters metode.

## Dine egne ligninger

### Eksempel 1:

Du har købt en vare, der med moms kostede 1.295 kr.

Du ved at momsen er 25% af prisen uden moms.

Du vil finde prisen uden moms.

Du gætter på 1.100 kr. og afprøver dit gæt:

$$1.100 \cdot 25\% + 1.100 = 1.295$$

$$1.375 = 1.295$$

1.100 passede altså ikke så du erstatter det med et x og løser den ligning, der kommer ud af det:

$$x \cdot 25\% + x = 1.295$$

$$0,25x + x = 1.295$$

$$1,25x = 1.295$$

$$1,25x : 1,25 = 1.295 : 1,25$$

$$x = 1.036$$

Prisen uden moms er 1.036 kr.

### Forklaring:

Det er altid sværere at "regne baglæns":

Man ved hvad et regnestykke skal give som resultat og skal finde et af de tal, der indgår i regnestykket.

Man kan gøre sådan:

- start med at gætte på et tal.
- afprøv om tallet passer ved at skrive regnestykket til venstre for et lighedstegn og det resultat det skal give til højre for lighedstegnet. Hvis det ikke passer så:
- erstat gættet med x og:
- løs den ligning, der kommer ud af dette.

- 1 Du vil købe D-mark for 2.000 danske kr.  
Du ved at man skal betale 3,85 kr. for 1 D-mark og at man skal betale 20 kr. i vekselgebyr.  
Du gætter på at du kan købe 550 D-mark.
  - Afprøv dit gæt.
  - Erstat dit gæt med x og løs den ligning der kommer ud af dette.

**2** Du ved at man kan finde en cirkels areal i  $m^2$  ved at gange dens radius i m med sig selv og tallet 3,14.  
Du vil finde ud af hvor stor en radius et bed med form som en cirkel skal have for at arealet bliver på  $5 m^2$ .

- Gæt på en radius.
- Afprøv dit gæt.
- Lav en ligning og løs dit problem

**3** Du ved at regningen for dit el-forbrug beregnes sådan:  
Du betaler 725 kr. i tilslutningsafgift og 0,975 kr. pr. kilowatttime du bruger.  
Du vil finde ud af hvor mange kilowatttimer du kan tillade dig at bruge hvis regningen ikke må blive over 3.500 kr.

- Gæt på et el-forbrug og afprøv gættet.
- Lav en ligning og løs dit problem.

**4** Du skal blande 150 liter spagnum med så meget jord at der i blandingen er 35% spagnum.

- Gæt på hvor meget jord du skal bruge og afprøv gættet.
- Lav en ligning og løs dit problem.

**5** Du har 750 kr. til at købe stolper og brædder til et hegn, der skal være 16 meter langt.  
Brædderne er 2 m lange og koster 3,35 kr. pr stk.  
Stolperne koster 15,50 kr. pr. stk. og du skal bruge 9 stk.  
Du ved ikke hvor mange brædder du skal slå på hver stolpe.

- Gæt, afprøv, lav ligning og find dermed ud af hvor mange brædder der kan slås på hver stolpe.

**6** Du ved at du skal betale 5% i strafrente, hvis du overtrækker din lønkonto. Du undrer dig over en meddelelse fra banken om at den har trukket 235,50 kr. i strafrente

- Gæt, afprøv, lav ligning og find hvor meget banken mener du har overtrukket din konto med.

### **Eksempel 2:**

Du vil blande koncentreret sprinklervæske med vand. I den koncentrerede sprinklervæske er der 85% sprit og i blandingen skal der være 35% sprit. Du vil blande så du har 2 liter blanding.

Du ved ikke hvor meget vand og hvor meget koncentreret sprinklervæske du skal bruge men gætter på 1,5 liter vand og afprøver dit gæt:

Sprinklervæske: Sprit i blandingen:

$$\begin{array}{rcl} 2 - 1,5 = 0,5 & 1,5 \cdot 0\% + 0,5 \cdot 85 & = 2 \cdot 35\% \\ & 0,425 & = 0,7 \end{array}$$

Gættet passede ikke, men du kan lave ligninger ud af dit forsøg ved at kalde mængden af vand for x og mængden af koncentreret sprinklervæske for y::

$$\begin{array}{rcl} 2 - x & = y & x \cdot 0\% + y \cdot 85\% & = 2 \cdot 35\% \\ & & x \cdot 0\% + (2 - x) \cdot 85\% & = 2 \cdot 35\% \\ & & 1,7 - 0,85x & = 0,7 \\ & & 1 & = 0,85x \\ & & 1,18 & = x \end{array}$$

$$2 - 1,18 = y$$

$$0,82 = y$$

Du skal altså bruge 1,18 liter vand og 0,82 liter koncentreret sprinklervæske.

### **Forklaring:**

Er der to ring man ikke kender, skal man forsøge at lave to ligninger med to ubekendte. Også her er det nemmest hvis man starter med at gætte, afprøver sit gæt og derefter laver ligningerne.

Ligningerne skal dreje sig om to forskellige ting. I eksemplet handler den ene ligning om den samlede mængde sprinklervæske og den anden om procentindholdet af sprit.

Ligningerne løses som vist på side 10.

- 1** Du skal fortynde et rensmiddel med vand.  
I rensmidlet er der 60% natronlud.  
Der er to betingelser der skal opfyldes:
- I den færdige blanding skal der være 25% natronlud.
  - Du skal bruge 1 liter af den færdige blanding.
- Kald mængden af vand for  $x$  og mængden af rensmiddel for  $y$  og lav to ligninger.
  - Løs ligningerne.
- 2** Du skal blande to væsker.  
I den ene væske er der et indhold på 10% svovlsyre og i den anden 25% svovlsyre.  
Blandingen skal have et indhold på 20% svovlsyre og du skal i alt fremstille 1.000 ml.
- Lav to ligninger med to ubekendte og løs dem.
- 3** Du skal blande grus og sand.  
Gruset vejer 3,4 ton pr.  $m^3$  og sandet 4,5 ton pr.  $m^3$ .  
Du skal i alt bruge 5  $m^3$  af blandingen og den skal veje 4,0  $m^3$  pr. ton.
- Lav to ligninger med to ubekendte og løs dem.
- 4** En slagter skal blande hakket kalvekød med hakket flæskekød.  
Kg-prisen for kalvekøddet er 45,- kr. og for flæskekøddet 33,- kr.  
Slagteren vil fremstille 20 kg hakket kalv og flæsk og til en kg-pris på 39,95 kr.
- Lav to ligninger med to ubekendte og løs dem.
- 5** Du vil lave en ramme til et billede og har en liste på 2 m til rådighed.  
Du vil have at rammen skal være 10 cm højere end den er bred.
- Lav to ligninger med to ubekendte og løs dem.

DEMO