brikkerne til
regning & matematik

funktioner

F+E+D

preben bernitt

brikkerne til regning & matematik
funktioner F+E+D
beta udgave som E-bog
ISBN: 978-87-92488-37-4

bernitt-matematik.dk
mail@bernitt-matematik.dk
Fjordvej 6
4300 Holbæk

Forord

Hæftet er et af ni, der er udabejdet til undervisning på VUC på niveauerne F+E+D og dette indeholder *kernestoffet*, som det er beskrevet om funktioner i undervisnings-vejledningen om trinnene F+E+D. Hæfterne er opbygget således at udover at indøve kernestoffet vil man også få styrket de matematiske *kompetencer* :

I dette hæfte arbejdes der specielt med *ræsonnement* og *modelbygning*, idet opgaverne lægger op til overvejelser om disse begreber. Endelig er der i appendixet på side 44 en gennemgang af disse begreber.

Dette er en *beta-udgave*, der er udarbejdet med baggrund i den vejledningen om undervisning på VUC, der udkom i 2009. I forhold til de faglige krav, der viser sig at blive stillet ved de fremtidige skriftlige prøver efter trin D kan der være fag-indhold, der mangler og der kan være fag-indhold, der senere viser sig ikke er være relevant. bernitt-matematik.dk fralægger sig ethvert ansvar for eventuelle følger af at anvende hæftet.

Hæftet omhandler følgende emner, men i en lidt anden rækkefølge end den vejledningen lægger op til (grafisk løsning gennmgås før proportionalitet).

I indledningen til hvert af emnerne gennemgås fagudtryk, der er kendt fra trin G, og som anvendes i forklaringerne i dette hæfte.

Siderne i hvert kapitel er opdelt således, at først forklares og vises med eksempler og derefter er der opgaver. En stor del af opgaverne er bearbejdede eksamensopgaver fra HF fra årene 1997 – 2003. Dette er gjort, for at man kan stifte bekendtskab med sprogbrugen og dermed lette overgangen til det gymnasiale niveau C.

En del af opgaverne kræver brug af en lommeregner med tasterne:
x^y og $\sqrt[y]{x}$ eller med tasten: ^
I brugervejledningen til lommeregneren står, hvordan man anvender disse taster til løsning af de konkredte opgaver.

Fra side 49 er facitliste, hvor man kan se forslag til løsninger.

Almen funktions forståelse

En funktion er en sammenhæng mellem to størrelser, hvor den ene størrelse kan siges at være resultatet af en proces, hvor den anden størrelse indgår.

Ved køb af benzin kan man således sige, at prisen y er en funktion af det antal liter benzin man køber x. Hvis liter-prisen f.eks. er 8,35 kr. kan man skrive sammenhængen mellem prisen y for den antal liter x man køber på følgende måde:
$y = 8{,}35 \cdot x$
Denne formel kaldes en *funktionsforskrift* eller funktionens *regneforskrift*.

x og *y* kan være erstattet af andre bogstaver eller bogstavs-forkortelser som f.eks. y_x (læses som *y* af *x*).

x og y kaldes for de to *variable* og y kaldes for funktionens *funktionsværdi*. Tallet 8,35 kaldes for en konstant: dét er et tal, der er fastlagt for den situation, man er i. Konstanter kan dog godt variere fra situation til situation (literprisen kan variere fra dag til dag) og konstanter kan derfor også være skrevet med bogstavsforkortelse:
$y = p_l \cdot x$ p_l betegner literprisen

Forskriften herover har *tre ubekendte*: de to *variable* x og y og *konstanten* p_l.

De tal, der kan indsættes på x-ets plads kaldes for funktionens *definitions-mængde* og de tal, der kan komme ud af beregningerne kaldes for *værdi-mængden*.

Til ethvert tal indsat på x´s plads kan der udregnes én og kun én *funktionsværdi*. Der findes således lige så mange løsninger til en funktion, som der findes tal der kan indsættes på x´s plads. Enhver løsning til en funktion består altså af et tal indsat på x´s plads og den tilhørende funktionsværdi.

En løsning kan skrives som et *koordinatsæt*, hvor x-værdien sættes først og funktionsværdien sættes sidst. Et koordinatsæt, der er løsning til ovennævnte funktion er f.eks. (20, 167).

Sammenhængen mellem x og funktionsværdien kan illustreres i et *koordinatsystem*, hvor man tegner *funktionens grafiske billede*.

I situationer, hvor man arbejder med flere funktioner samtidigt, kan det være nyttigt at navngive funktionerne. Der er tradition for at navngive dem med bogstaverne: *f* , *g* , *h* osv. F.eks.:
$f\!: y = 2x + 3$
$g\!: y = x + 2$

Graf tegning

Funktioner kan illustreres med en tegning i et koordinatsystem:

Eksempel: Givet en funktion f:

$y_x = -x^2 + 25$

Tegn det grafiske billede af f for x ε [0 ; 5]

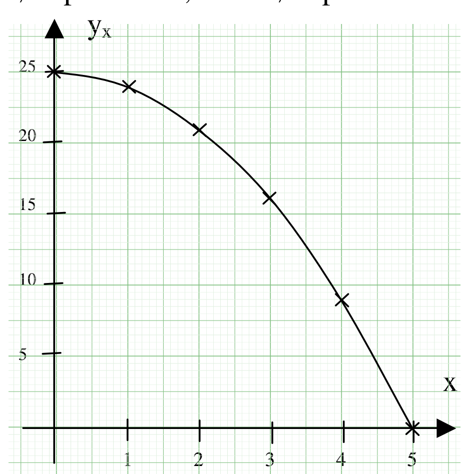
Løsning: Først udregnes en række regne-eksempler på sammenhængen mellem x og y_x indenfor det angivne interval.

$y_0 = -0^2 + 25 = 25$
$y_1 = -1^2 + 25 = 24$
$y_2 = -2^2 + 25 = 21$
$y_3 = -3^2 + 25 = 16$
$y_4 = -4^2 + 25 = 9$
$y_5 = -5^2 + 25 = 0$

Eksemplerne kan også skrives i et skema

x	0	1	2	3	4	5
y_x	25	24	21	16	9	0

Eksemplerne afsættes som støttepunkter i et koordinatsystem. Akserne inddeles så både x og y_x maksimums værdier fra skemaet kan vises. Igennem punkterne tegnes en blød kurve, fordi det må være sådan, at funktionsværdierne udvikler sig på samme måde mellem støttepunkterne, som støttepunktrene viser.



1. Givet en funktion *f* :

$y = 3x + 1$

- Tegn det grafiske billede af *f*.

2. Givet en funktion *f*:

$y = x^2$

- Tegn det grafiske billede af *f* for x ε [0-5; 5]

3. Givet en funktion *f*:

$y = \dfrac{10}{x}$

- Tegn det grafiske billede af *f* for x ε [0,1 ; 10]

4. Givet en funktion *f*:

$y_x = 2x^3$

- Tegn det grafiske billede af *f* for x ε [-5 ; 5]

5. Givet en funktion *f*:

$y_x = 2000 \cdot 1{,}05^x$ *for* x ε [0 ; 10]

- Tegn det grafiske billede.

6. Givet en funktion *f*:

$y_x = x - 2$ *for* x ε [-5; 0]

$y_x = 2x - 2$ *for* x ε [0 ; 5]

- Tegn det grafiske billede.

7. Givet en funktion *f*:

$y_x = 2000$ *for* x ε [0 ; 200]

$y_x = 1{,}75x + 2000$ *for* $x > 200$

- Tegn det grafiske billede for x < 1000

Grafisk løsning

Når man bruger en tegnet graf til at løse et matematisk problem, siger man at man har anvendt metoden: grafisk løsning.

Nøjagtigheden af løsningen, afhænger af, hvor stor og detaljeret grafen er tegnet, men uanset hvordan man har gjort, må en løsning fundet på en tegning, altid anses for en tilnærmet værdi til den rigtige løsning.

Grafisk løsning anvendes specielt i forbindelse med lignings-systemer. Et lignings-system består af to eller flere ligninger, der indeholder de samme ubekendte:

$y = 2x + 3$ og $y = -x + 8$

er et ligningssystem, der består af to ligninger med de samme to ubekendte.

En ligning med to ubekendte har uendelig mange løsninger: Til enhver værdi, der indsættes på x-es plads kan udregnes en værdi, der så passer på y-ets plads.

Har man to ligninger med to ubekendte kan der muligvis findes én eller flere løsninger, der passer i begge ligninger.

Disse kan findes ved at betragte ligningerne som funktions-forskrifter og tegne deres grafiske billede i et koordinat-system. Har graferne et eller flere skæringspunkter, er disses x- og y-værdier løsning til begge ligninger.

Et eksempel fra den "virkelige verden": Et tele-selskab tilbyder to typer af abonnement:

(1) Månedspris: 99 kr. Minut-takst: 0,45 kr.
(2) Månedspris: 0 kr. Minut-takst: 0,95 kr.

Opgaven kunne så lyde, hvornår de to tilbud giver den samme betaling.

Omsat til funktions-forskrifter kunne det se sådan ud:

samlet pris i kr. y_x
samtaletid i minutter x
(1) $y_x = 0{,}45x + 99$
(2) $y_x = 0{,}95x$

og så ville opgaven kunne løses, ved at tegne de to grafer og aflæse x-værdien til deres skæringspunkt. Men husk: Løsningen er ikke eksakt rigtig.

I hæftet Formler og ligninger D gennemgås, hvordan man også kan løse et ligningssystem ved beregning. Med denne metode fås den eksakt rigtige løsning.

Grafisk løsning af ligningssystem

Eksempel: Et tele-selskab tilbyder to typer af abonnement:
Månedspris: 99 kr. Minut-takst: 0,45 kr.
Månedspris: 0 kr. Minut-takst: 0,95 kr.
Hvor mange minutter skal man tale på en måned, for at de to takster giver den samme samlede pris?

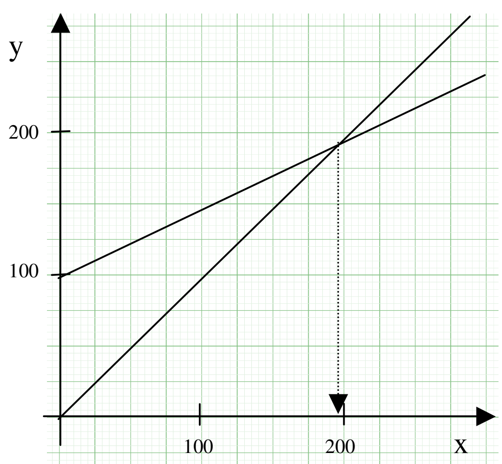
Løsning: Taksterne omsættes til funktionsforskrifter og der udregnes en række sammenhængende værdier

$y_x = 0{,}45x + 99$

x	0	100	200	300
y_x	99	144	189	234

$y_x = 0{,}95x$

x	0	100	200	300
y_x	0	95	190	285



De to takster giver samme månedspris en forbrug lige under 200 min. Den første takst er dyrest frem til dette, hvorefter den anden takst bliver dyrest.

1. En vognmand beregner prisen for transport efter to takster:
1850 kr. pr. transport incl. 10 km kørsel. Yderligere km koster 5 kr. pr. km.

- Vis prisen som funktion af antallet af km op til 100 km
- Tegn en linie, der viser en samlet pris på 2.000 kr..
- Hvor lang må transporten være for at prisen er mindre end 2.000 kr.?

2. Leje af en bil kostede enten 2.150 kr. pr. dag incl. retten til at køre et frit antal km., eller 1.500 kr. med ret til at køre 40 km plus 2,00 kr. pr. km, der blev kørt mere end 40.

- Vis de to muligheder i et koordinatsystem
- Hvor meget skal man køre for at den første mulighed bedst kan betale sig?

3. Den varme man bliver udsat for ved at befinde sig i nærheden af en varmekilde kan beregnes af formlen herunder:

P_v: varmepåvirkning i kwatt
a: afstand i meter
k er en konstant, der angiver varmekildens påvirkning i kwatt i 1 meters afstand

$$P_v = \frac{k}{a^2}$$

- Tegn en graf for en varmekilde hvor k = 1200 kwatt og tegn den for afstande fra 1 til 20 meter.

En person uden beskyttelse kan højst tåle en påvirkning på 500 kwatt.

- Tegn en linie i koordinatsystemet, der viser dette og aflæs hvor tæt på varmekilden en person uden beskyttelse kan komme.

En person med beskyttelse kan tåle 800 kwatt.

- Tegn også en linie for dette og aflæs, hvor tæt på varmekilden en beskyttet person kan komme.

4. En virksomhed planlægger produktion og salg af en vare.
I fast produktionsomkostninger regner virksomheden med at have 20.000 kr. og derudover koster det 5 kr. pr. vare der fremstilles.
Virksomheden regnede med at kunne sælge varerne for 20 kr. pr. stk.

- Tegn grafer for produktionsomkostninger og salgsprisen for x antal varer.
- Hvor mange vare skal der produceres og sælges for at produktionen begynder at give overskud?

5. Når en landmand tilfører sin mark kunstgødning ved han, at det udbytte han får af sin høst afhænger af den mængde gødning han tilsætter.
Følgende sammenhæng gælder:

Udbytte ved salg af korn pr. ha i 1.000 kr.: P
Gødningsmængde i kg pr. ha: x
$P(x) = 8x - \frac{1}{2}x^2$
Gødningen koster 10 kr. pr. kg

- Vis hvordan udbyttet afhænger af gødningsmængden.
- Vis i samme koordinatsystem hvordan prisen på gødningen afhænger af hvor meget gødning han bruger pr. ha.
- Hvilken gødningsmængde kan det bedst betale sig for ham at bruge?

Proportionalitet

Ordet p*roportionalitet* kommer af ordet: proportioner, der betyder størrelses- forhold. Når man f. eks. beskriver et menneskes proportioner, kan det være forholdet mellem højde-mål og liv-mål.

I matematik bruges ordet *proportionalitet* i beskrivelsen af størrelses forholdet mellem to afhængige størrelser (en funktion). Man skelner mellem to typer:

Ligefrem proportionalitet

Er gældende når de to afhængige størrelser vokser i takt:
Det vil sige at når den ene f. eks. fordobles, så fordobles den anden også.
Tænk f. eks. på køb af benzin. Hvis man fordobler det antal liter man køber, så fordobles den samlede pris også.

Ligefrem proportionalitet har forskrifter af formen:
$y_x = kx$
hvor k kaldes for proportionalitets faktoren.

Omvendt proportionalitet

Er gældende når de to afhængige størrelser ændrer sig modsat hinanden:
Det vil sige, at når den ene f.eks. fordobles, så halveres den anden.
Tænk f.eks. på kørsel i bil: Hvis hastigheden fordobles, så halveres køretiden for den strækning man skal køre.

Omvendt proportionalitet har forskrifter af formen:

$$y_x = \frac{k}{x}$$

ingen af de variable kan have værdien 0. Det ligger dels i at regnearten division ikke kan udføres med tallet 0, men det ligger også i selve naturen af en omvendt proportionalitet: Tænk på eksemplet fra før om hastighed og køretid: det giver hverken nogen mening at finde køretid hvis hastigheden er 0, eller finde hastighed når køretiden er 0.

Langt fra alle sammenhænge kan beskrives som enten ligefrem- eller omvendt proportional:

Et tele-selskab tilbyder to typer af abonnement:
(1) Månedspris: 99 kr. Minut-takst: 0,45 kr.
(2) Månedspris: 0 kr. Minut-takst: 0,95 kr.

Kun i (2) udvikler den samlede pris sig ligefremt proportionalt: Det er kun ved dette abonnement, at prisen fordobles når minut-forbruget fordobles.

proportionaliteters grafer

Eksempel: Tegn grafer for funktioner *f* og *g*:

$f\colon y_x = 4x$ og $g\colon y_x = \dfrac{4}{x}$

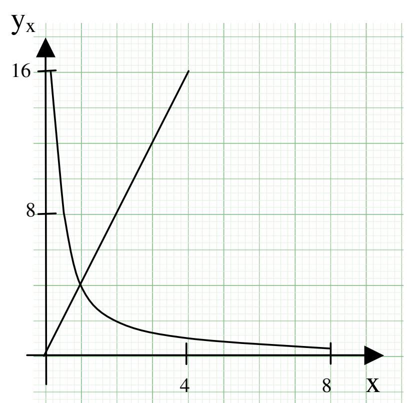
Løsning: Der udregnes en række sammenhængende værdier

$y_x = 4x$

x	0	1	2	4
y_x	0	4	4	16

$y_x = \dfrac{4}{x}$

x	¼	½	4	8
y_x	16	8	1	½



f er en ligefrem proporionalitet og har en ret linie gennem (0,0) som graf. Det gælder for alle ligefremme proportionaliteter

g er en omvendt proportionalitet og har en kurve, der kaldes en hyperbel-gren og som er kendetegnet ved:
- at starte uendeligt højt og tæt på y-aksen
- at slutte uendeligt langt ude og tæt på x-aksen.

1. Formlen viser sammenhængen mellem *T* og *P*.

$$T = \frac{4x}{3}$$

- Er *T* og *P* ligefremt eller omvendt proportionale størrelser?
- Tegn graf, der viser sammenhængen mellem *T* og *P* .

2. Formlen viser sammenhængen mellem *x* og *y*.

$$y = \frac{4}{3x}$$

- Er x og y ligefremt eller omvendt proportionale størrelser?
- Tegn en graf der viser sammenhængen mellem *x* og *y*

3. Skemaet viser nogle eksempler på sammenhængen mellem *x* og *y*.

x	1	2	4	8
y	4	2	1	½

- Er *x* og *y* ligefremt eller omvendt proportionale størrelser?
- Skriv en formel der viser sammenhængen mellem *x* og *y*

4. Skemaet viser nogle eksempler på sammenhængen mellem *T* og *P*.

T	1	2	4	8
P	2	1	0,5	0,1

- Er *T* og *P* ligefremt eller omvendt proportionale størrelser?
- Skriv en formel der viser sammenhængen mellem *T* og *P*.

5. I skemaet herunder kan man se, hvad man skulle betale for kartofler.

Kartofler - kg	1	2	5	25
Pris – kr.	8,65	17,30	43,25	216,25

- Afgør hvilken form for proportionalitet, der er tale om, op skriv en formel, der viser sammenhængen mellem antal kg (A) og prisen (P).

6. Skemaet viser hvor lang tid det tager at køre 100 km, ved forskellige hastigheder.

Hastighed – km/t	10	20	40	50
Køretid for 100 km - timer	10	5	2,5	2

- Afgør hvilken form for proportionalitet, der er tale om og skriv en formel der viser sammenhængen mellem hastighed og køretid for 100 km.

Lineære funktioner

Lineære funktioner er funktioner, hvor den ubekendte er i *1. potens* og derfor blot skrives som x i funktionsforskriften.

$y = 0{,}15x + 99$

Ordet: *Lineær* henviser til at *graferne* for denne type funktionen er rette linier.

Lineære funktioner er kendt i forbindelse med fænomener, der udvikler sig med en fast *takst* eventuelt med udgangspunkt i en *grundværdi*. I eksemplet herover er taksten 0,15 og grundværdien +99.

At en ting udvikler sig med en fast takst kaldes også for at tingen *udvikler sig lineært* eller: at der er tale om: *lineær vækst.*

At udvikle sig lineært betyder ikke kun, at vokse. Fald med en fast takst er også lineær.

Lineære funktioner bruges også til at beskrive situationer, der tilsyneladende udvikler sig med en fast takst:

Selvom man godt ved, at det aldrig passer helt, så betragter man brændelsels-forbruget igennem en vinter som en lineær funktion af den gennemsnitlige ude-temperatur. Man siger at en lineær funktion kan være en *tilnærmet model* til det faktiske brændsels-forbrug. Læs mere om *matematisk model* i appendixet på side 36.

$y = ax + b$

Lineære sammenhænge kan udtrykkes med følgende almene forskrift:

Lineær aftagende/voksende funktion:
$y_x = ax + b$
a er stigningstallet
b er funktionsværdien for x = 0

Eksempel: Givet en lineær funktion *f* af formen:
$y_x = ax + b$
For funktionen gælder, at når
x = 4 er $y_x = 5$ og når
x = 6 er $y_x = 8$

- Find størrelsen af konstanterne a og b og angiv en forskrift for *f*.

Løsning: Man kan finde løsningen ved at *ræsonnere* sådan:

Først om stigningstakten *a*:
Funktionsværdien vokser med 3 når x vokser med 2. Dette betyder at stigningstakten (stigning pr. 1) er
$a = 3 : 2 = \underline{\underline{1\frac{1}{2}}}$

Og om konstanten *b*:
Efter at være vokset for 0 til 3 er funktionsværdien 6. For x = 0 må funktionensværdien være:
$b = 6 - 3 \cdot 1\frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

Forskrifte for *f*:
$\underline{\underline{y_x = 1\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}}$

Ved at *ræsonnere* dig frem til løsning af denne type opgaver, får du styrket din indsigt i konstanterne a og b. Samtidigt får du styrket din evne til at *ræsonnere*. Læs eventuelt mere om at *ræsonnere* i appendixet på side 36.

Brug at *ræsonnere* til løsning i de følgende opgaver.

1. Givet forskriften for en lineær funktion:
$y = ax + 1$
Når x = 3 er y = -2 og når x = 8 er y = 3

- Find ved at ræsonnere størrelsen af *a*.

2. Givet forskriften for en lineær funktion:
$y = \frac{1}{2}x + b$
y = 5 når x = 2

- Find ved at ræsonnere størrelsen af *b*.

3. Givet forskriften for en lineær funktion:
$y = ax + b$
Når x = 2 er y = -2 og når x = 5 er y = 4

(1) Find ved at ræsonnere størrelsen af a og b.

4. Givet forskriften for en lineær funktion:
$y = ax + b$
Når x = 3 er y = 3 og når x = -1 er y = -2

- Find *a* og *b* ved at ræsonnere

5. Givet forskriften for en lineær funktion:
$y = ax + b$
Når x = 1 er y = 3 og når x = 3 er y = -2

- Find *a* og *b* ved at ræsonnere

6. Givet forskriften for en lineær funktion:
$y = ax + b$
Når x fordobles, bliver y fem gange så stor.

- Find *a* og *b*.

7. Givet forskriften for en lineær funktion:
$y = ax + b$
Funktionsværdien er konstant –6.

- Find *a* og *b*.

8. Givet forskriften for en lineær funktion:
$y = ax + b$
Funktionsværdien af 4 er 8 og funktionsværdien af 2 er 16.

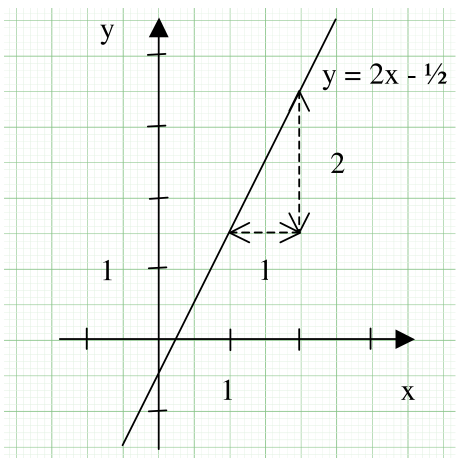
- Find *a* og *b*.

Lineære funktioners grafer

Lineære funktioner har fået deres navn, fordi deres grafer når de tegnes i et almindeligt koordinatsystem er rette linier.

I en formelsamling kan man læse følgende om en lineær funktion.

Lineær aftagende/voksende funktion:
$y = ax + b$
a: stignings-taksten (stigningstallet/hældningskoefficienten)
(0 , b): skæringspunkt med y-aksen.
$(-\frac{b}{a}, 0)$: skæringspunkt med x-aksen



Eksempel: Tegn grafen for $y = 2x - ½$ ved hjælp af oplysningerne i rammen.

Løsning: Den lineære funktion: $y = 2x - ½$ har:
- Stigningstal: 2
- Skær y-aksen i tallet: -½
- Skær x-aksen i tallet: $-\frac{-½}{2} = \frac{1}{4}$

Grafen kan tegnes med udgangspunkt i -½ på y-aksen, y skal stige med 2 for hver gang x stiger med 1 og den skal gå igennem $\frac{1}{4}$ på x-aksen.

1. Givet formler for de lineære funktioner *f* og *g*:

f: $y = 2x + 3$

g: $y = -2x + 7$

- Angiv stignings tal, skæringspunkt med y-aksen og skæringspunkt med x-aksen for begge funktioner.
- Tegn graferne for *f* og *g* og angiv koordinatsættet for deres skæringspunkt

2. Givet formler for de lineære funktioner *f* og *g*:

f: $y = x – 3$

g: $y = -x + 3$

- Angiv stignings tal, skæringspunkt med y-aksen og skæringspunkt med x-aksen.

3. Givet formlen for en lineær funktion:

$y = ax + b$

- Vis at når x = 0 er y = b
- Vis at når y = 0 er $x = \frac{-b}{a}$

4. Givet formlen for en lineær funktion:

$y = 2x + b$

- For hvilken værdi af *b* skær grafen x-aksen i (2 , 0)?

5. Givet formlen for en lineær funktion:

$y = ax - 2$

- Find stigningstallet idet det oplyses at grafen skærer x-aksen i (-1 , 0).

6. Givet formlen for en lineær funktion *f*:

f: $y = ax + b$

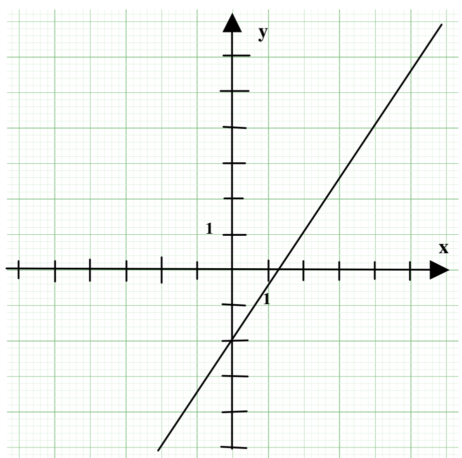
- Find a og b, idet det oplyses at grafen går igennem (0 , -2) og (3 , 0).
  En lineær funktion g med forskriften:
  g: $y = 2x + b$
  indeholder også (3 , 0)
- Tegn *g* og find ved aflæsning størrelsen af *b*.

forskrift for en ret linie

Da lineære funktioner har grafer, der er rette linier, kan man modsat også sige, at alle rette linier tegnet i et koordinatsystem kan beskrives med en forskrift af formen:

Forskrift for ret linie:
$y = ax + b$
a: stignings-taksten (stigningstallet/hældningskoefficienten)
(0 , b): skæringspunkt med y-aksen.
$(-\frac{b}{a}, 0)$: skæringspunkt med x-aksen

Eksempel: Aflæs funktionsforskriften for grafen herunder.



Løsning: Grafen skær y-aksen i (0 , -2) og har stigningstallet 1½.
Forskriften er:
$y = 1\frac{1}{2}x - 2$

1. Tegn i et koordinatsystem den rette linie, der går igennem:
(2 , 1) og (-1 , 5)

- Find ved aflæsning forskriften for linien.

2. Tegn i et koordinatsystem den rette linie, der går igennem (2 , 2) og som har stigningstallet -1

- Find ved aflæsning forskriften for linien.

3. Tegn i et koordinatsystem den rette linie, der går igennem:
(0 , 0) og (-1 , 5)

- Find ved aflæsning forskriften for linien.
- Opstil en regel for fællestrækkene for linier, der går igennem (0 , 0)

4. Tegn i et koordinatsystem den rette linie *l*, der går igennem (2 , 2) og som har stigningstallet ½.

- Find ved aflæsning forskriften for linien *l*.

Tegn i samme koordinatsystem en linie *m*, der er parallel med linien *l* og som går igennem ((2 , 3).

- Hvad er stigningstallet for denne linie?
- Opstil en regel for fælles-trækkene ved forskriften for linier, der er parallelle.

5. Tegn i et koordinatsystem den rette linie *l*, der går igennem:
(-1 , 1) og (2 , 5)

- Find ved aflæsning forskriften for linien *l*.

Tegn i samme koordinatsytem en ret linie *m*, der skærer *l* i (2 , 5) og som står vinkelret på *l*.

- Find ved aflæsning forskriften for linien *m*.
- Læs eventuelt mere om stigningstal for linier, der danner rette vinkler i appendixet fra side 36.

6. Tegn i et koordinatsystem den rette linie, der går igennem:
(2 , 2) og (4 , 2)

- Find forskriften for linien.
- Opstil en regel for fællestræk for forskrifterne for linier, der er parallelle med x-aksen?

7. Tegn i et koordinatsystem den rette linie *l*, der går igennem (2 , 2) og (2 , 3).

- Kan *l* siges at være graf for en funktion?
- Angiv en forskrift for linien *l*.
- Opstil en regel for fællestrækkene ved linier, der er parallelle med y-aksen

linære funktioner som model

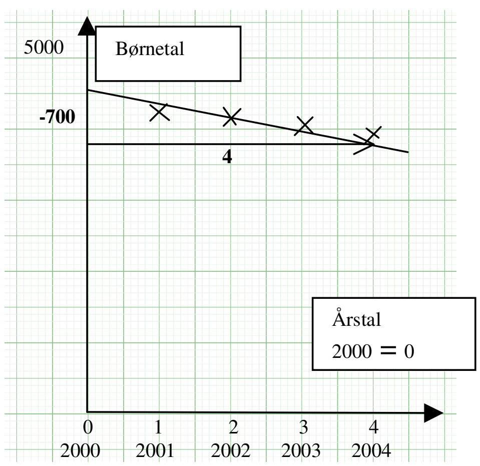
Udviklinger eller sammenhænge, der med tilnærmelse danner en ret linie i et koordinatsystem, kan beskrives med en forskrift for lineær funktion. man siger at en lineær funktion kan være en *model* på den faktiske udvikling eller sammenhæng. Læs eventuelt mere om *matematisk model* i appendix på side 36.

Eksempel: Tallene herunder viser udviklingen i børnetallet (6 – 10 årige) i en kommune med udgangspunkt i året 2000.

År 0 (2000)	*år 1*	*år 2*	*år 3*	*år 4*
4 505	*4218*	*4187*	*4065*	*3940*

Vis udviklingen i et koordinatsytem og tegn den rette linie, der passer bedst på udviklingen.
Opstil en lineær model, der passer med udviklingen og brug denne til at lave et skøn af børnetallet i 2010.

Løsning:



Den bedste rette linie, er den, hvor afstandene til de krydser, der kommer til at ligge over linien svarer til afstandene til de krydser, der ligger under linien.

Linien skærer y-aksen i 4500 og har stigningstallet: -700 : 4 = -175
Lineær model for udviklingen:
$y = -175x + 4500$
x er antal år efter 2000
y antal 6 – 10 årige

Skønnet børnetal i 2010 (år 10) : $-175 \cdot 10 + 4500 = 2750$

1. Skemaet viser nogle eksempler på sammenhængen mellem pris og den tid man bruger en mobiltelefon hos et bestemt teleselskab:

Pris pr. måned

Minutter	100	200	300	400
Pris	150	200	250	300

- Vis at sammenhængen følger en ret linie.
- Lav en forskrift for den rette linie.
- Brug forskriften til at finde, hvor meget det vil koste at tale 25 minutter på en måned.

2. Skemaet viser nogle eksempler på sammenhængen mellem vægten for en bestemt type træ-stolper og deres længde.

Længde i mm

500	1000	1500	1750	2000
1,5 kg.	3,0 kg	4,5 kg	5,3 kg	6,0 kg

- Vis tallene i et koordinatsystem
- Lav en forskrift til sammenhængen.

3. Skemaet viser antallet af robotter i dansk industri i årene fra 1982 til 1991

Industrirobotter - 1000 stk.

1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991
62	76	114	164	210	287	349	410	489	552

- Vis med en tegning at der med tilnærmelse er en lineær sammenhæng.
- Lav en forskrift for sammenhængen.
- Brug forskriften til at forudsige, hvos mange robotter, der vil være i 2010 hvis udviklingen fortsætter.

4. I et forsøg har man ladet en person indtage alkohol. Personens alkoholpromille måles umiddelbart efter indtagelse og derefter med en times mellemrum.
Skemaet viser nogle af resultaterne:

Alkoholpromille afrundet til nærmeste 0,05

Start	efter 1 time	efter 2 timer	efter 3 timer
1,10	1,00	0,95	0,80

- Vis tallene i et koordinatsystem.
- Antag at sammenhængen er lineær og tegn den bedste rette linie.
- Lav en forskrift til linien.
- Brug forskriften eller linien til at afgøre, hvornår personen har en promille på under 0,2.

5. Tabellen viser nogle eksempler på skattebetaling for en person, der tjener mellem 50.000 kr. og 390.000 kr.

	50.000	100.000	150.000	300.000
Skat	2.660	21.660	40.660	97.660

Vis tallene i et koordinatsystem.

- Hvad skal personen betale i skat af en indkomst på 200.000 kr.?
- Opstil en lineær model for sammenhængen mellem indkomst og skattebetaling.

6. Antallet af medlemmer i et idrætsforbund er siden 2000 med god tilnærmelse faldet med 2.500 om året. I 2000 var medlemstallet 75.675.

- Benyt oplysningerne til at opstille en lineær model, der beskriver udviklingen i medlemstallet i årene efter 2000.
- Benyt den lineære model til at forudsige, hvornår medlemstallet når under 50.000.

7. Vandrør udvider sig ved opvarmning. Et vandrør il varmt vand har ved temperaturen 20°C længden 25,00 meter. Når temperaturen stiger til 60°C, bliver røret 0,18 meter længere.
Rørlængden y målt i meter, som funktion af temperaturen x målt i °C, har en regneforskrift af formen:
$y = ax + b$

- Beregn tallene a og b.
- Beregn rørets længde ved temperaturen 70°C

Røret kan maksimalt tåle en udvidelse på 0,30 m.

- Beregn den maksimale temperatur, røret kan tåle.

8. Ozonlaget i atmosfæren beskytter mod solens ultraviolette stråling. Ozonlagets tykkelse er registreret siden 1979. I en model antager man, at ozonlagets årlige gennemsnitstykkelse kan beskrives ved en funktion af formen:
$y = ax + b$
hvor y er ozonlagets gennemsnitstykkelse, målt i Dobson-enheder, og x er antal år efter 1979.

- Find a og b idet det oplyses, at i 1981 var tykkelsen over Danmark målt til 349 Dobson-enheder og i 1989 til 334 Dobson-enheder.
- Beregn ozonlagets tykkelse i 2001 ifølge ovenstående model.

Ozonlaget blev i 2004 målt til en tykkelse på 327 Dobson-enheder.

- Hvordan passer dette med modellen?

Eksponential funktioner

Eksponential funktioner er funktioner, hvor den ubekendte er *eksponent* i funktionsforskriften.

$y = 5000 \cdot 1{,}05^x$

Eksponent er det lille tal for oven i et *potens-tal*.
Tallet 1,05 kaldes *grundtallet*, roden eller basis. I dette hæfte bruges: *grundtallet*. Potenstallet herover læses derfor sådan: *grundtallet* 1,05 opløftet med *eksponenten* x, eller blot:
1,05 i x-te potens.

Eksponential funktioner er bedst kendt i forbindelse med fænomener, der udvikler sig med procentvise stigninger.
F. eks.:
Penge, der står på en bankkonto, til en fast årlig rente og som får tilskrevet rentes-rente. Forskriften herover kan f.eks. stamme fra en udregning af indestående y efter x år, når der oprindeligt er indsat 5000 kr. og rentesatsen er 5% pr. år.

At en ting udvikler sig med en fast procent-vis ændring kaldes også for at tingen *udvikler sig eksponentielt*.

At udvikle sig eksponentielt betyder ikke kun at stige med en bestemt procent-sats. Fald med en fast procent-sats er også eksponentiel.

Eksponential funktioner bruges til at beskrive mange andre situationer, der tilsyneladende udvikler sig eksponentielt:

Selvom man godt ved at det aldrig passer helt, så betragter man ofte befolkningsudviklingen i verdenen som en eksponentiel udvikling. Man siger at en eksponential funktion kan være en *tilnærmet model* til den faktiske befolkningsudviklingen.

I arbejde med eksponential funktioner kommer man også til at arbejde at *uddrage roden* af et tal: $\sqrt[a]{b}$. Resultatet af dette regnestykke er det tal, der opløftet i a-ne potens giver b. At uddrage roden af et tal bruges til at løse en ligning som denne:
$x^5 = 1{,}156$ har løsningen $x = \sqrt[5]{1{,}156}$
Hvis din lommeregner ikke har en tast med $\sqrt[a]{b}$ kan du istedet bruge denne omskrivning:

$\sqrt[5]{1{,}156} = 1{,}156^{\frac{1}{5}}$ som kan tastes sådan: 1,156 **^ (** 1 / 5**)**

$y = b \cdot a^x$

Eksponential vækst kan vises med forskellige formler.

Kapitalfremskrivning (procentvis vækst)
Startkapital K_0
Rentefod r
Kapital K_n efter n terminer $K_n = K_0(1 + r)^n$

Eksponentielt
aftagende/voksende funktion: $y = b \cdot a^x$

Formlerne udtrykker det samme og kan bruges i de samme situationer, men den øverste ser man ofte i forbindelse med rentesregning og den nederste i forbindelse med teoretisk gennemgang af eksponential funktioners egenskaber.

Eksempel: 300 000 kr. Indsættes på en bank konto til 4,75% pr år.
Brug $y = b \cdot a^x$ beregne:
Brug $y = b \cdot a^x$ til at finde hvor meget vil der stå på kontoen efter 10 år?

Løsning: y svarer til K_n i rente-formlen, b svarer til k_0, a til $(1 + r)$ og x til n:
$y = b \cdot a^x$
$y = 300\,000 \cdot 1{,}0475^{10}$
$y = 477\,157$
Der vil stå <u>477 157 kr.</u>

1. Givet formlen for eksponentiel voksende funktion:
$y = b \cdot a^x$
Find størrelsen på a i følgende situationer:
- En kapital på 5 000 kr. indestår på en konto til 5% p.a.
- En størrelse fordobles.

2. Givet formlen for eksponentiel voksende funktion:
$y = b \cdot a^x$
Find størrelsen på a i følgende situationer:
- En størrelse aftager med 8% pr. gang.
- En størrelse halveres et antal gange.
- En størrelse ændrer sig ikke.

3. For en eksponential funktion af formen $y= b\cdot a^x$ gælder, at b = 34,56 og a = 0,98.

- Er der tale om en aftagende eller voksende funktion?
- Bestem den procentvise ændring.

Bestem den procentvise ændring for eksponential funktioner af formen $y = b\cdot a^x$ hvor:

- a = 1,015
- a = 0,996
- a = 3,14
- a = 0,01

4. Givet en eksponential funktion af formen: $y = b\cdot a^x$

- Vil y være eksponentielt stigende/faldende, hvis b = 0?
- Vil y være eksponentielt stigende eller faldende hvis a = 0?
- Giver det mening hvis a < 0?
- Giver det mening at indsætte 0 på x-es plads?
- Giver det mening at indsætte negative tal på x-es plads?

5. Forbruget af drikkevand i en kommune forventedes at falde eksponentielt igennem en årrække med i gennemsnit 6% pr år.

En gennemsnitsfamilie brugte som udgangspunkt 175 m^3 drikkevand.

- Bestem en regneforskrift af formen $y = b\cdot a^x$
- Hvor stort et forbrug må det forvendtes at gennemsnitsfamilien har efter 5 år?

6. En størrelse fordobles et antal gange efter hinanden.

- Bestem en regneforskrift af formen $y = b\cdot a^x$
- Hvor mange gange større vil størrelsen være efter at være fordoblet 8 gange?

7. En størrelse halveres et antal gange efter hinanden.

- Bestem en regneforskrift af formen $y = b\cdot a^x$
- Hvor stor en brøkdel af den oprindelige størrelse er der tilbage efter 5 gange?

beregn b, a eller x

Regneforskriften for eksponentiel funktioner indeholder fire ubekendte
$y = b \cdot a^x$
Hvis man vil beregne størrelsen af én af de ubekendte i en regneforskrift med fire ubekendte skal man kende størrelsen på de tre øvrige:
Man indsætter de værdier man kender og løser den ligning, der fremkommer.

Eksempler 300 000 kr. står på en konto med en fast årlig rente på 4,75%
Hvor meget vil stå på kontoen efter 10 år?

Løsning $y = b \cdot a^x$
y er ubekendt, b = 300 000, a = 1,0475 og x = 10
$y = 300\,000 \cdot 1{,}0475^{10}$
$y = 477\,157$
Kapital efter 10 år: <u>477 157 kr.</u>

Eksempel En kapital er efter 5 år til en fast årlig rente på 2% vokset til 5 200 kr.
Find den oprindelige kapital.

Løsning y = 5200, b er ubekendt, a = 1,02 og x = 5
$5200 = b \cdot 1{,}02^5$
$5200 : 1{,}02^5 = b$
$4709{,}80 = b$
Den oprindelige kapital har været <u>4710 kr.</u>

Eksempel 300 000 kr. står på en konto med fast årlig rente. Efter 10 år er beløbet vokset til 536 640 kr.
Find rentesatsen.

Løsning y = 536 640, b = 300 000, a er ubekendt og x = 10:
$536\,640 = 300\,000 \cdot a^{10}$
$536\,640 : 300\,000 = a^{10}$
$1{,}7888 = a^{10}$
$\sqrt[10]{1{,}7888} = a$
$1{,}080053 = a$
Renten har været <u>8 %</u>

Eksempel Hvor mange år vil der gå før 4 000 kr. der står på en konto til 2% pr. år bliver til 5 000 kr.?

Løsning $5000 = 4000 \cdot 1{,}02^x$
$5000 : 4000 = 1{,}02^x$
$1{,}25 = 1{,}02^x$
Ved at prøve sig frem med lommeregner findes at:
$1{,}02^{11} = 1{,}24337$ og $1{,}02^{12} = 1{,}26824$
Kapitalen skal stå i 12 år.

1. En bank giver 3,5% p.a. i rente på en bestemt konto. Der indsættes 5300 kr.

- Bestem, hvor mange penge der står på kontoen efter 4 år.

2. En kapital vokser med 2,8% pr. måned.

- Hvor mange procent (1 decimal) vokser kapitalen pr. kvartal?

En anden kapital vokser med 11% pr. kvartal.

- Hvor mange procent (1 decimal) vokser denne kapital pr. måned?

En tredje kapital vokser med 6% om året.

- Hvor mange år vil der gå, før denne kapital er vokset med 40%

3. Et beløb K_0 indsættes på en konto til en rente på 1,3% om året. Efter 10 år er beløbet vokset til 17 068,12 kr.

- Beregn K_0 .

4. I det følgende antages, at bakterieantallet som funktion af tiden vokser eksponentielt.
Desuden antages det, at der ved starten er 1 bakterie, og at der efter 180 minutter er
1000 bakterier.

- Bestem en regneforskrift for den funktion, der angiver bakterieantallet som funktion af antal minutter efter starten.
- Hvor mange minutter går der, før bakterieantallet er 500?
- Med hvor mange procent stiger bakterieantallet pr. time?

5. Tabellen viser indekstal for forbruget af drikkevand i Frederiksborg Amt. Indekstallene er beregnet med 1991 som basisår.

År	*1992*	*1995*	*1998*
Indekstal	*101,3*	*93,0*	*80,1*

- Beregn det gennemsnitlige årlige procentvise fald i forbruget af drikkevand i Frederiksborg Amt i perioden 1992-1998 .

6. Et beløb indsættes på en konto til 2,5% om året.

- Beregn det antal år, der vil gå før beløbet fordobles.

7. Udviklingen i det danske skovareal gennem de seneste århundreder kan med tilnærmelse beskrives ved en eksponentielt voksende funktion af tiden. Det oplyses, at skovarealet fordobles i løbet af 100 år, og at skovarealet i 1990 udgjorde 417 000 hektar.

- Bestem en regneforskrift for skovarealet y, målt i hektar, som funktion af tiden x, målt i antal år efter 1990.
- Beregn, hvor stort skovarealet vil være i 2005, hvis denne udvikling fortsætter.
- I hvilket år vil skovarealet overstige 500000 hektar, hvis denne udvikling fortsætter?

8. *Parkareal:*
1976: 14 m^2 pr. indbygger, 1996: 29 m^2 pr. indbygger
Kilde: Natur og Miljø 1997, Miljø- og Energiministeriet.

De danske byers parkareal pr. indbygger i 1976 og i 1996 fremgår af tallene herover.

- Beregn den gennemsnitlige årlige procentvise stigning i parkarealet pr. indbygger i perioden 1976–1996.
- Hvor stort et parkareal pr. indbygger vil der være i år 2005, hvis den årlige procentvise stigning fra 1996 er 3,5%?

9. Tabellen viser antallet af ledige medlemmer af Specialarbejdernes arbejdsløshedskasse.

Tidspunkt:	*oktober 1993*	*oktober 1994*	*oktober 1995*
Antal ledige:	*58 742*	*51 263*	*40 182*

- Beregn, hvor mange procent antallet af ledige er faldet fra oktober 1993 til oktober 1994 og fra oktober 1994 til oktober 1995.

Nedenstående tabel viser indekstal for antallet af ledige medlemmer af metalarbejdernes Arbejdsløshedskasse, MAK.

Tidspunkt	*oktober 1993*	*oktober 1994*	*oktober 1995*
Indeks	*100*	*69,4*	*50,2*

- Beregn det gennemsnitlige årlige procentvise fald i antallet af ledige i MAK i perioden fra oktober 1993 til oktober 1995.

10. Prisen på en vare vokser fra 200 kr. til 275 kr. i løbet af 4 år.

- Beregn den gennemsnitlige årlige procentvise stigning i denne 4-årsperiode.

11. Prisen på en vare ændrer sig i 3 på hinanden følgende år med henholdsvis 30%, 12% og -14%

- Beregn den samlede procentvise stigning
- Beregn den gennemsnitlige årlige procentvise ændring i denne 3-årsperiode.

12. En person køber et maleri til en værdi af 60 000 kr. Maleriets værdi vokser herefter med 10% hvert af de første 3 år og derefter med 20% hvert af de følgende 2 år.

- Bestem værdien af maleriet efter 5 år.
- Bestem den samlede procentvise stigning over de 5 år.

13. Nedenstående udklip er fra POLITIKEN den 8. juli 2002 og handler om alkoholforbruget i Grønland.

Grønland på vej ud af sprittågerne

... I 2001 blev der indført 9,3 liter ren alkohol pr. person, viser tal fra Grønlands Statistik. De danske tal for 2001 er endnu ikke klar, men i 2000 lå det grønlandske og danske forbrug tæt på hinanden. Og noget tyder på, at Danmark har overhalet Grønland i druk ... .
Forbruget i Grønland i dag er lille, i forhold til hvad der blev indtaget af alkohol i 1980'erne. I 1987 toppede indførslen af ren alkohol med 22 liter pr. person ... .

- Beregn med 2 decimaler det gennemsnitlige årlige procentvise fald i indførslen af ren alkohol pr. person i perioden 1987-2001.

I det følgende antages, at dette årlige procentvise fald i indførslen af ren alkohol pr. person fortsætter uændret efter 2001.

- Hvor mange liter ren alkohol pr. person vil der blive indført i 2010 ?
- I hvilket år vil indførslen af ren alkohol pr. person komme under 4,0 liter ?
- Hvor lang tid går der, før indførslen af ren alkohol pr. person er halveret ?

14. Indholdet af kulstof-14 i en organisme aftager fra dødstidspunktet.
Indholdet af kulstof-14 som funktion af tiden fra dødstidspunktet er givet ved:
$y = 100 \cdot 0{,}99988^x$
hvor y er den procentdel af den oprindelige mængde kulstof-14, der er tilbage, og x er antal år efter dødstidspunktet.

For 25 000 år siden levede der mammutter i Danmark.

- Beregn den procentdel kulstof-14, der er tilbage i deres skeletter.

Den tilbageværende procentdel kulstof-14 i en mumie på Glyptoteket er 71,3.

- Beregn hvor gammel mumien er.

Eftervise forskrift

Når man har at gøre med en udvikling, kan man forsøge at antage at den med tilnærmelse er foregået eksponentielt og ud fra denne antagelse kan man opstille en forskrift. Bagefter kan man eftervise forskriften og samtidigt fastslå, hvor stor tilnærmelsen forskriften passer.

Eksempel Tabellen viser udviklingen i antallet af hektar, der var dyrket økologisk i Europa.

årstal	*1989*	*1991*	*1993*	*1995*	*1997*
mio. ha	*0,22*	*0,35*	*0,65*	*1,10*	*1,90*

Det antages at arealet *y* med god tilnærmelse har udviklet sig eksponentielt som funktion af antal af år efter 1989 *x*.

Vis at forskriften $y = 0{,}22 \cdot 1{,}30^x$ med god tilnærmelse kan være model for udviklingen.

Løsning Hvis udviklingen har været $y = 0{,}22 \cdot 1{,}30^x$ ville tallene for arealet have været:

1989: $y = 0{,}22 \cdot 1{,}31^0 = 0{,}22$
1991: $y = 0{,}22 \cdot 1{,}31^2 = 0{,}38$
1993: $y = 0{,}22 \cdot 1{,}31^4 = 0{,}65$
1995: $y = 0{,}22 \cdot 1{,}31^6 = 1{,}11$
1997: $y = 0{,}22 \cdot 1{,}31^8 = 1{,}91$

Forskriften passer med udviklingen med den tilnærmelse, der kommer af at afrunde til 1. decimal.

1. Nedenstående tabel viser det samlede antal containere, der er håndteret (dvs. lastet, losset eller flyttet) i havne over hele verden i perioden 1995-2000 .

År	*1995*	*1996*	*1997*	*1998*	*1999*	*2000*
Antal håndterede containere (i mio.)	*145*	*157*	*175*	*189*	*209*	*235*

Antag, at antallet af håndterede containere y med god tilnærmelse kan beskrives med følgende model, hvor x er antal år efter 1995:

$y = 145 \cdot 1{,}1^x$

- Beregn antallet af containere for årene 1995 til 2000, hvis udviklingen fulgte modellen.
- Hvordan skal man afrunde modellens tal, for at de passer med den faktiske udvikling?
- Hvor mange containere forventes håndteret i år 2005?
- I hvilket år forventes antallet af håndterede containere at komme over 450 mio.?
- Med hvor mange procent stiger antallet af håndterede containere over en 5-årsperiode ifølge denne udvikling?

2. Nedenstående tabel viser lufttrykket i højder mellem 11 km og 20 km over jorden.

Højde (km)	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*
Tryk (millibar)	*226*	*193*	*165*	*141*	*120*	*103*	*88*	*75*	*64*	*55*

Antag, at antallet af håndterede containere y med god tilnærmelse kan beskrives med følgende model, hvor x er antal år efter 1995:

$y = 230 \cdot 0{,}85^x$

- Beregn trykket for højderne 11 km til 20 km, hvis udviklingen følger modellen.
- Hvordan skal man afrunde modellens tal, for at de passer med den faktiske udvikling?

I det følgende ser vi på et fly, der flyver mellem 11 km og 20 km over jorden. På flyet måles et tryk på 150 millibar.

- Bestem flyets højde over jorden.
- Hvor mange procent falder trykket på et fly, hver gang flyet kommer 0,5 km højere op?

På et fly måles et tryk, der er dobbelt så stort som på et andet fly.

- Bestem højdeforskellen mellem de to fly.

3. Nedenstående tabel viser udviklingen i antallet af medlemmer i en forening.

År	*1993*	*1994*	*1995*	*1996*	*1997*
Antal medlemmer	*3143*	*4662*	*7332*	*11308*	*17435*

Antag, at antallet af medlemmer y med god tilnærmelse kan beskrives med følgende model, hvor x er antal år efter 1993:

$y = 3150 \cdot 1{,}5^x$

- Beregn antallet af medlemmer for årene 1993 til 1997, hvis udviklingen fulgte modellen.
- Hvordan skal man afrunde modellens tal, for at de passer med den faktiske udvikling?
- Beregn antallet i 1999, og kommentér resultatet, idet det oplyses, at antallet af medlemmer i 1999 var 30 000.

4. Ved en undersøgelse af 4–12 årige pigers højde og vægt har man for hvert alderstrin bestemt pigernes gennemsnitshøjde og gennemsnitsvægt.

Gennemsnitshøjde i cm	*100*	*106*	*112*	*118*	*124*	*129*	*134*	*139*	*144*
Gennemsnitsvægt i kg	*15,6*	*17,4*	*19,4*	*21,6*	*23,9*	*26,1*	*28,6*	*31,0*	*33,9*

- Passer følgende forskrift?
  Højde: x
  Vægt: y
  $y = 2{,}2 \cdot 1{,}02^x$

Bestemme forskrift

Hvis man antager, at en udvikling foregår eksponentielt, kan man ud fra kendskab til startstørrelsen og slutstørrelsen bestemme en forskrift.

Eksempel Tabellen viser udviklingen i antallet af hektar, der var dyrket økologisk i Europa.

årstal	*1989*	*1991*	*1993*	*1995*	*1997*
mio. ha	*0,22*	*0,35*	*0,65*	*1,10*	*1,90*

Det antages at arealet *y* med god tilnærmelse har udviklet sig eksponentielt som funktion af antal af år efter 1989 *x*.
Bestem en forskrift, der med god tilnærmelse kan beskrive udviklingen.

Løsning Hvis udviklingen med tilnærmelse er en eksponential funktion gælder:
$y = b \cdot a^x$
$b = 0{,}22$ (startstørrelsen)
a kan findes ved at slut-størrelsen:

$$1{,}90 = 0{,}22 \cdot a^8$$
$$1{,}90 : 0{,}22 = a^8$$
$$\sqrt[8]{1{,}90 : 0{,}22} = a$$
$$1{,}31 = a$$

Funktionsforskrift: $y = 0{,}22 \cdot 1{,}31^x$

1. Nedenstående tabel viser for perioden 1993–1997 udviklingen i antallet af delebilister i Schweiz, dvs. personer, der var tilmeldt en delebil-ordning.

År	*1993*	*1994*	*1995*	*1996*	*1997*
Antal delebilister	*2514*	*3830*	*5866*	*9046*	*12848*

Antag at antallet af delebilister med god tilnærmelse er vokset eksponentielt i perioden 1993–1997.

- Bestem en regneforskrift for en eksponentielt voksende funktion, der med god tilnærmelse angiver antallet af delebilister i perioden 1993–1997 som funktion af antal år efter 1993.
- Undersøg med hvilken afrunding forskriften passer på hvert af årene 1993 til 1997.
- Beregn antallet af delebillister i 1999, og kommentér resultatet, idet det oplyses, at antallet af delebilister i 1999 rent faktisk var 24 000.
  Kilde: Information d. 16. *august* 1999.

2. For en fugleunge i et æg er der en sammenhæng mellem ungens temperatur og puls. Skemaet nedenfor viser sammenhørende værdier af temperatur og puls.

Temperatur (^{o}C)	24,2	24,7	30,4	31,1	32,4	33,9	35,0	36,3
Puls, dvs. antal hjerteslag pr. minut	36	38	75	82	94	110	133	154

- Antag at sammenhængen er eksponentiel og bestem en regneforskrift.
- Afgør med hvilken nøjagtighed din regneforskrift passer.
- Bestem pulsen ved 27°C.
- Ved hvilken temperatur er pulsen 60?
- Hvor mange grader skal temperaturen stige, for at pulsen øges med 40%?
  Kilde: E. Batschelet: Introduction to Mathematics for Life Scientists, N.Y. 1971.

3. Tabellen herunder viser sammenhængen mellem to størrelser x og y.

x:	*0*	*10*	*15*	*20*	*30*
y:	*5*	*25*	*35*	*45*	*65*

- Antag at sammenhængen er eksponentiel og bestem en regneforskrift.
- Afgør med hvilken afrunding din regneforskrift passer og kommentér dette.

4. Der er en sammenhæng mellem et jordskælvs styrke og dets varighed. I en model kan sammenhængen beskrives ved en funktion af formen
$y = b \cdot a^x$
hvor y er varigheden af jordskælvet, målt i sekunder, og x er styrken, angivet ved det såkaldte Richter-tal. Formlen kan bruges for Richter-tal, der er 4 eller derover og det er forskellen på jordskælvets styrke og tallet 4, der skal indsættes i formlen.

Et jordskælv på netop 4 har en varighed på 22 sekunder og et jordskælv med styrken 7,4 har en varighed på 63 sekunder.

- Bestem tallene a og b .

Et tredje jordskælv med Richter-tal 5 er målt til at vare 30 sekunder.

- Afgør med hvilken afrunding din model passer med dette.

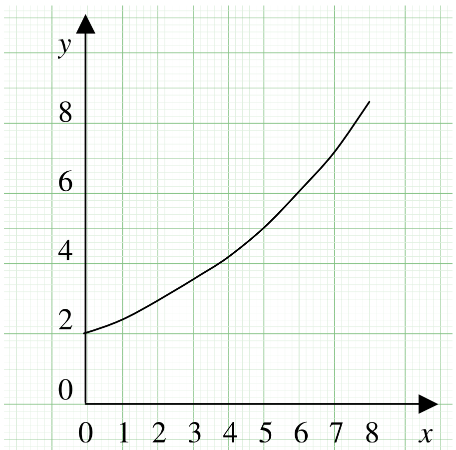
I det følgende betragtes jordskælv, hvor ovenstående model kan anvendes.

- Beregn varigheden af et jordskælv med Richter-tal 6 .
- Beregn Richter-tallet for et jordskælv, der varer 100 sekunder.

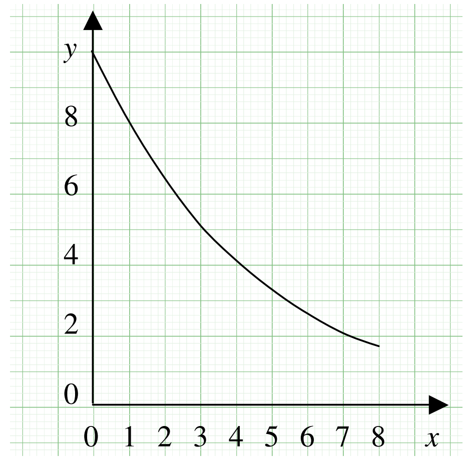
eksponential funktioners grafer

Eksponential funktioner kan som andre funktioner afbildes i et koordinatsystem.

$y = 2{\cdot}1{,}2^x$



$y = 10{\cdot}\,0{,}8^x$



Det gælder for alle eksponential funktioner $y = b{\cdot}a^x$ at deres grafer:
- starter eller skærer på 2. aksen i tallet b
- er kurver, hvis stejlhed er stigende eller aftagende.

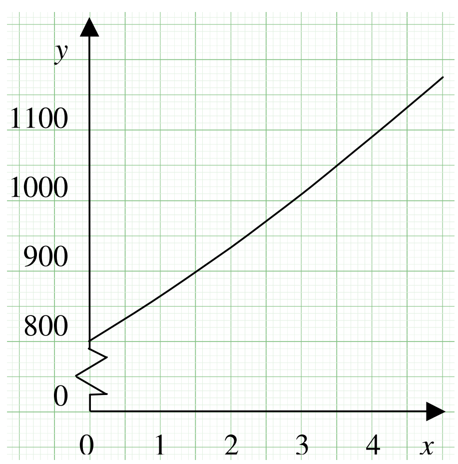
Eksponential funktioner kan tegnes ved at udregne et passende antal eksempler på sammenhørende x og y værdier.

Eksempel Tegn grafen for: $y = 800{\cdot}1{,}08^x$ for $0 \le x \le 5$

Løsning

$x = 0 \Leftrightarrow y = 800{\cdot}1{,}08^0 = 800$
$x = 1 \Leftrightarrow y = 800{\cdot}1{,}08^1 = 864$
$x = 2 \Leftrightarrow y = 800{\cdot}1{,}08^2 = 933$
$x = 3 \Leftrightarrow y = 800{\cdot}1{,}08^3 = 1008$
$x = 4 \Leftrightarrow y = 800{\cdot}1{,}08^4 = 1088$
$x = 5 \Leftrightarrow y = 800{\cdot}1{,}08^5 = 1175$

x	0	1	2	3	4	5
y	800	864	933	1008	1088	1175



1. Tegn følgende eksponential funktioner i hvert deres koordinatsystem.

- $y = 3 \cdot 1{,}2^x$ for $0 < x < 10$
- $y = 3 \cdot 1{,}2^x$ for $-2 \le x \le 5$
- $y = 3 \cdot 0{,}8^x$ for $0 \le x \le 10$
- En kapital på 5.000 kr., der forrentes med 3% pr. år igennem 18 år
- Prisen for huse, der gennem en 5 års periode er vokset eksponentielt med 20% pr. år.

2. Man kan i et temahæfte om Nepal læse at befolkningen fordobles på 30 år..
I 1995 var Nepals befolkningstal 20,1 millioner.
Det antages, at befolkningstallet vokser eksponentielt.

- Tegn i et passende koordinatsystem grafen for en funktion, der angiver Nepals befolkningstal som funktion af tiden, målt i år fra 1980 til 2010
- Bestem Nepals befolkningstal i år 1990 og i år 2000.
- I hvilket år vil Nepals befolkningstal passere 25 millioner?

3. For en bestemt bil har man undersøgt benzinforbruget ved forskellige hastigheder over 50 km/t.
I nedenstående tabel er benzinforbruget angivet for en strækning på 100 km.

Hastighed (km/time)	*50*	*70*	*120*
Benzinforbrug (liter pr. 100 km)	*5,0*	*6,2*	*11,0*

Det antages, at benzinforbruget er en eksponentielt voksende funktion af hastigheden.

- Tegn grafen for benzinforbruget i et koordinatsystem.
- Bestem benzinforbruget ved en hastighed på 90 km/time.
- Bestem bilens hastighed, hvis benzinforbruget er 9,5 liter pr. 100 km.
- Hvor meget skal bilens hastighed forøges, for at benzinforbruget fordobles ?

4. Tabellen viser udviklingen i antallet medlemmer af Dansk Golf Union.

År	*1990*	*1992*	*1994*	*1996*	*1998*
Antal golfspillere	*39 132*	*47 397*	*56 052*	*67 734*	*78 394*

- Indtegn tabellens oplysninger i et koordinatsystem.
- Bestem en regneforskrift for en eksponentielt voksende funktion, der med tilnærmelse angiver antallet af medlemmer som funktion af antal år efter 1990.
- Giv et skøn over, hvor mange medlemmer der vil være i år 2005, hvis denne udvikling fortsætter.
- I hvilket år vil antallet overstige 100 000, hvis denne udvikling fortsætter?

Potens funktioner

Potens funktioner er funktioner, hvor den ubekendte er opløftet i en potens, f. eks.: $y = x^3$

Du kender potens funktioner fra beregning af arealer og rumfang, men der findes mange andre fænomener, der udvikler sig som en potens-funktion.

Den almene form for potens-funktioner er:

$y = b \cdot x^a$

Definitionsmængden er de positive tal og konstanterne a og b er tal, hvor b skal være et positivt tal.

Der er nogle typer af funktioner, der er potens funktioner:

$a = 1$
ligefrem proportionalitet
1. grads funktioner af formen: $y = bx$ hvis grafer er rette linjer i koordinatsystem.

$a = -1$
omvendt proportionalitet
af formen: $y = \frac{b}{x}$ hvis grafer er hyperbel-grene

$a = 2$
2. grads funktioner
af formen $y = bx^2$ hvis grafer er parabler.

$y = b \cdot x^a$

Der er ingen begrænsninger for hvad eksponenten kan være i funktionsforskriften:
$y = b \cdot x^a$
og dermed kan blandt andet både ligefrem og omvendt proportionalitet siges at være potens funktioner.

Eksempel: For en potensfunktion $y = b \cdot x^a$ gælder at $b = 2$ og $a = -1$
Forklar funktionen og angiv definitions-mængden.

Løsning: Funktionens forskrift:
$y = 2 \cdot x^{-1}$
Eksponenten –1 svarer til at dividere med x^1 :
$y = \frac{2}{x}$
Funktions værdierne findes ved at dividere 2 med x.
Funktionen er en omvendt proportionalitet.
Definitions-mængden er alle tal bortset fra 0.
(man kan ikke dividere med 0)

1. I det følgende skal du undersøge betydningen af størrelsen af a i funktionsforskriften:
$y = b \cdot x^a$
Beskriv i hvert af tilfældende herunder hvilken type funktion og dermed graf, der fremkommer.

- Sæt a = 2 og beskriv hvilken type funktion og dermed hvilken graf, der fremkommer.
- Sæt a = 0
- Sæt a = 1
- Sæt a = -1
- Sæt a = $\frac{1}{2}$

2. Omskriv følgende funktioners forskrifter til formen: $y = b \cdot x^a$

- $y = 2x$
- $y = \sqrt[4]{x}$
- $y = \frac{4}{x^3}$
- y = 5½

3. Arealet af et kvadrat kan beskrives som en funktion af kvadratets sidelængde af formen:
$y = bx^a$

- Hvad skal y, b, x og a stå for?
- Skriv forskriften.

4. Omkredsen af et kvadrat kan beskrives som funktion af side længden af formen:
$y = bx^a$

- Hvad skal y, b, x og a stå for?
- Skriv forskriften.

5. En cirkels areal kan udtrykkes som en funktion af radius af formen:
$y = bx^a$

- Hvad skal y, b, x og a stå for?
- Skriv forskriften.
- Denne funktion er udover at være en potens funktion også en af følgende: Ligefrem proportionalitet, 2. grads funktion eller omvendt proportionalitet. Hvilken?

6. Omkredsen af en cirkel er en funktion dens radius.

- Skriv en forskrift af formen $y = bx^a$ for denne funktion.
- Hvilke begreber står y, b, x og a for?
- Denne funktion er udover at være en potens funktion også en af følgende: Ligefrem proportionalitet, 2. grads funktion eller omvendt proportionalitet. Hvilken?

7. Antal liter benzin, der kan købes for 400 kr. kan udtrykkes som en funktion af antallet af liter som potens funktion af literprisen.

- Hvor mange liter kan man købe, hvis liter-prisen er 9,50 kr.?
- Bestem den funktion af formen: $y = bx^a$, der udtrykker sammenhængen mellem literprisen x og antallet af liter y.
- Denne funktion er udover at være en potens funktion også en af følgende: Ligefrem proportionalitet, 2. grads funktion eller omvendt proportionalitet. Hvilken?

Find x, a eller b

Der er fire ubekendte i potens-funktioner:
$y = b \cdot x^a$
Kender man de tre kan størrelsen af de fjerde findes ved at indsætte de tal man kender og løse den ligning, der fremkommer.

Eksempel: Givet $y = b \cdot x^a$
Find x når y = 20, b = 4 og a = 1,2

Løsning:
$$y = b \cdot x^a$$
$$20 = 4 \cdot x^{1,2}$$
$$20 : 4 = x^{1,2}$$
$$5 = x^{1,2}$$
$$\sqrt[1,2]{5} = x$$
$$3,8236 = x$$

Eksempel: Givet $y = b \cdot x^a$
Find b når y = 20 x = 2 og a = 0,5

Løsning:
$$y = b \cdot x^2$$
$$20 = b \cdot 2^{0,5}$$
$$20 = b \cdot 1,4142$$
$$20 : 1,4142 = b$$
$$14,14 = b$$

Eksempel: Givet $y = b \cdot x^a$ og y = 200, x = 30 og b = 20.
Bestem a med 1 decimal.

Løsning:
$$y = b \cdot x^a$$
$$200 = 20 \cdot 30^a$$
$$200 : 20 = 30^a$$
$$10 = 30^a$$
Ved at prøve sig frem med lommeregneren findes at:
$30^{0,7} = 10,81$ og $30^{0,6} = 7,70$
a er med 1 decimal: 0,7

1. Vægten *y* i kg af en tom olietank er beskrevet ved nedenstående model, hvor *x* er tankens indhold i liter.
$y = 0,00034 \cdot x^{1,8}$

- Find vægten for en olietank, der rummer 1500 liter.
- Hvor stor et indhold i liter kan laves indenfor en vægt på 300 kg.

2. En bestemt type fjeders styrke kan beskrives ved en potens-funktion af formen:
$y = b \cdot x^a$
Hvor y er styrken, b afhænger af det materiale fjederen er fremstillet af, a af materialets tykkelse x af antallet af vindinger i fjederen.

En fjeder fremstilles af et materiale med b = 1,3 og med en materiale tykkelse, der har en a værdi på 2,1.

- Find styrken af en fjeder med 20 vindinger.
- Hvor mange vindinger skal en fjeder have for at få styrken, der er mindst 450?

Andre fjedrer fremstilles af det samme materiale men med mulighed for at bruge andre tykkelser.

- En fjeder skal have en styrke på 400 med 10 vindinger. Hvad skal a-værdien være?

3. Hvis en mark gødes mindre end det optimale, vil det medføre et udbyttetab. For vinterhvede kan udbyttetabet beskrives med funktionen:
$y = 6{,}5 \cdot x^{1{,}5}$ hvor x er undergødning i procent og y er udbyttetabet i kg/ha.

- Hvad er udbyttetabet ved en undergødning på 20%
- Hvor stor er undergødning i procent ved et udbyttetab på 1500 kg/ha?

For rug kan udbyttetabet ligeledes beskrives som en potensfunktion med eksponenten 1,5. En rugmark undergødedes med 10%, hvilket gav et udbyttetab på 400 kg/ha.

- Bestem den forskrift, der kan bruges til at bestemme udbyttetabet for rug.

4. Et lod ophængt i en snor kaldes for et pendul. Når et pendul sættes til at svinge, svinger det med en bestemt svingningstid, der kan beregnes af:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$$

hvor T er tiden for en svingning i sekunder, L er længden af pendulet i m og g en konstant, der beskriver tyngdekraften det sted pendulet svinger. g er i Danmark 9,81.

- Find T for et pendul med længden 2 m.
- Hvor langt skal et pendul være for at have en svingningstid på netop 1 sekund?
- Bliver svingningstiden dobbelt så stor, hvis man gør pendulet dobbelt så langt?

Eftervise forskrift

Potens funktioner kan bruges som model for udviklinger og sammenhænge. Ofte vil de dog blot passe med god tilnærmelse og det kan derfor være vigtigt at eftervise med hvor god tilnærmelse modellen passer. Det kan ske ved at man beregner hvor stor afrunding man skal lave af de beregnede resultater.

Eksempel: Tabellen herunder viser sammenhængen en bils hastighed og dens lovpligtige bremselængde:

Hastighed i km/t - x	*50*	*80*	*110*
Bremselængde i m - y	*16*	*40*	*80*

Sammenhængen kan med god tilnærmelse beskrives med:
$y = 0{,}007 \cdot x^{2,0}$

Eftervis forskriften og afgør med hvilken tilnærmelse forskriften passer.

Løsning: Forskriften giver følgende resultater, når hastighederne 50, 80 og 110 indsættes:
$y = 0{,}0065 \cdot 50^{2,0} = 16{,}25$
$y = 0{,}007 \cdot 80^{2,0} = 41{,}6$
$y = 0{,}007 \cdot 110^{2,0} = 78{,}65$
Forskriften passer med den tilnærmelse, der opnås ved at afrunde til nærmeste hele tal deleligt med 5.

1. En række test-personer blev sat i forskellige afstande til en TV-skærm og blev bedt om at vurdere tydeligheden af et farvet felt ved at sammenligne det med farvede felter der blev vist i en konstant afstand på 1 meter. Resultatet fremgår af tabellen herunder:

Afstand til skærm i m:	*1,0*	*1,5*	*2,0*	*2,5*	*3,0*
Tydelighed (fra 10 til 0):	*10*	*4*	*3*	*2*	*1*

Antag, at tydeligheden y med god tilnærmelse kan beskrives med følgende model, hvor x er afstanden i meter:
$y = 10 \cdot x^{-2}$

- Hvordan skal man afrunde modellens tal for at få de faktiske tal?
- I hvilken afstand må tydeligheden antages at være 0?

2. Ved en test blev det undersøgt, hvor stort et træk, der var i en sikkerhedssele ved en opbremsning i løbet af 1 sekund afhængig af personens vægt og hastigheden inden opbremsning. Resultaterne fremgår af tabellen:

Bilens hastighed i km/t	*30*	*30*	*50*	*50*
Personens vægt i kg	*50*	*80*	*50*	*80*
Kraft-påvirkning	*3320*	*5610*	*9740*	*15930*

Antag, at kraft-påvirkningen y med god tilnærmelse kan beskrives med følgende model, hvor x hastigheden og m er personens vægt.

$$y = \left(\frac{x}{3,6}\right)^2 \cdot m$$

- Undersøg hvordan man skal afrunde modellens tal for at de passer med de faktiske tal.
- Hvor stor en kraftpåvirkning kan man forvente for en person, der vejer 100 kg ved en opbremsning fra 50 km/t?
- Hvor høj hastighed kan nedbremsningen foregå fra før kraftpåvirkningen overstiger 25000 for en person, der vejer 100 kg?

3. Ved en test af en solfanger blev det undersøgt, hvilken indflydelse solfangerens hældning havde på dens virkning. Resultaterne fremgår af tabellen:

Hældning i grader $x \le 60°$	*15*	*30*	*50*	*60*
Virknings-grad y	*0,91*	*0,96*	*1,00*	*1,02*

Antag at virkningsgraden y med god tilnærmelse kan beskrives med følgende model, hvor x er hældningen i grader.
$y = 0,7366x^{0,0784}$

- Undersøg hvordan man skal afrunde modellens tal for at de passer med de faktiske tal.
- Hvor stor en virkningsgrad må man forvente at få hvis hældningen er 45°?
  En solfanger har en virkningsgrad på 0,80. Hvilken hældnings grad har solfangeren?

4. Undersøg om modellen $y = 5,2 \cdot x^{-0,8}$ med god tilnærmelse passer nedenstående tabel:

x:	*10,0*	*20,0*	*30,0*	*40,0*
y:	*0,85*	*0,45*	*0,30*	*0,20*

Appendix

at ræsonnere (I)

Der findes principielt tre fremgangsmåder til løsning af et matematisk problem:

(1) Gætte en løsning og derefter eftervise, at løsningen passer
(2) Anvende en løsningsmetode, som man har fået meddelt af andre
(3) Ræsonnere sig frem til en løsning

Se f. eks. opgaven: ”En linie l er givet ved: $y = 2x - 3$.
Find liniens skæringspunkt med x-aksen”

At bruge (1) kan foregå ved gætte på forskellige værdier af x og indsætte dem indtil man rammer den værdi, der giver $y = 0$.

At bruge (2) til løsning foregår f. eks. ved at bruge formlen:
Skæringspunkt med x-aksen: $(\frac{-b}{a}, 0) = (\frac{-(-3)}{2}, 0) = (1\frac{1}{2}, 0)$

At bruge (3) er en arbejdsproces der starter med at opstille en problemformulering, dernæst opstiller man en række *sande argumenter*, der tilsammen fører frem til en konklusion, der er løsning til problemformuleringen:

Problemformulering:
Hvad er skæringspunktet med x-aksen for linien: $y = 2x - 3$?

1. argument: Skæringspunktet med x-aksen har en y-værdi på 0
2. argument: Når $y = 0$ er $2x - 3 = 0$
3. argument: For at $2x - 3 = 0$ skal $2x$ være lig med 3
4. argument: Hvis $2x$ skal være lig med 3, må x være $1\frac{1}{2}$.

Konklusion
Skæringspunkt med x-aksen i $(1\frac{1}{2}, 0)$

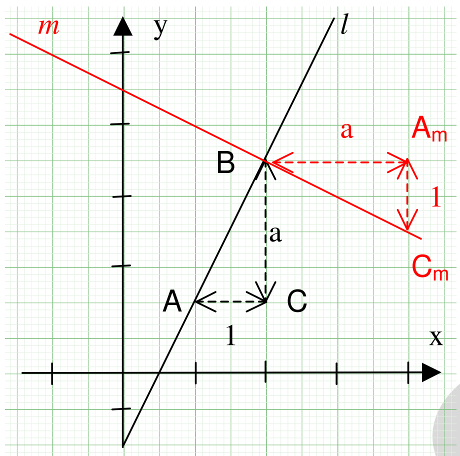
Metoderne (1), (2) og (3) kan i de fleste situationer være lige gode, hvis formålet blot er at få løst et problem.

Metode (3) er dog at foretrække, når man også skal kunne forklare løsningen til andre. Og så giver det også en vis tilfredsstilelse, at man selv forstår, hvorfor løsningen er rigtig. Med denne metode bliver matematik en kilde til oplevelse: Nysgerrighed om ”hvorfor” bliver afsæt til den tilfredsstillende oplevelse, når man kan sige ”derfor”.

at ræsonnere (II)

at ræsonnere sig frem til en løsning bruges, når man vil udtænke en almen gyldig sammenhæng. Alle formler og regnemetoder er resultatet af at ræsonnere. Du skal her se et eksempel på et sådant ræssonement.

Ræsonnementet handler om stignings-tallene for to linier, der står vinkelret på hinanden. Se tegningen og ræsonnementet under denne.



Problemformulering:
Er der en sammenhæng mellem stignings-tallet for to linier, der står vinkelret på hinanden og kan sammenhængen beskrives med en formel?

Argumenter:
Stignings-tallet for linien *l* (den sorte linie) kan vises som en retvinklet trekant ABC, kateter med længden 1 og a og et stykke af linien *l* som hypotenuse.

Linien *m* skal stå vinkelret på linien *l* og kan fastlægges ved at dreje linien l og trekant ABC 90° omkring punktet B. Se trekant A_mBC_m og linien *m*.

Den røde trekants kateter udtrykker stigningen for linien *m*:
Når x forøges med a, forøges y med -1

Stigningstallet for en linie er forøgelsen af y når x forøges med 1.
Stigningstallet for linien *m* er derfor:
$\frac{-1}{a}$

Konklusion
Givet en linie med stigningstallet *a*.
Linier, der står vinkelret på denne, har stigningstal $\frac{-1}{a}$.

Model-bygning

Følgende figur bruges ofte til at illustrere, hvad der menes med begrebet modelbygning i matematik.

Virkelighedens verden	Matematikkens verden
1. Problemformulering Beskrivelse af den problemstilling fra virkeligheden, der skal løses.	*2. Almen matematisk model* Blandt kendte matematiske modeller, vælges dén, der synes at passe bedst på problemstillingen.
4. Tolkning og vurdering Resultatet sammenholdes og vurderes i forhold til virkelighedens problemstilling.	*3. Matematisk behandling* Data fra virkeligheden behandles ved brug af den matematiske model.

Det er lettest at forklare figuren med et eksempel. Se eksemplet på siden overfor.

Besparelse i brændselsforbrug til opvarmning ved en forhøjelse af ude-temperaturen i fyringssæsonen.

Problemformulering

Klima-forandringerne vil muligvis medfører at middel-temperaturen i Danmark i fyrings-sæsonnen vil stige med 1,5° i forhold til perioden 1960 – 2000, hvor middel-temperaturen har været 3,3°.
Hvad vil det betyde for en husholdning, der normalt bruger 3.500 liter olie til at opvarme deres bolig til 21°?

Almen matematisk model

Ligefrem proportionalitet $y = ax$ vælges, fordi det antages, at jo større opvarmnings-behovet x er(forskel mellem inde- og ude-temperatur), jo større bliver brændselsforbruget y.

Matematisk behandling

Konstanten a findes for perioden 1960 - 2000:

$y = ax + b$

$3500 = a \cdot (21 – 3{,}3)$

$3500 : 17{,}7 = a$

$a = 197{,}7$

y findes for middel-temperatur på 3,3° + 1,5°

$y = 197{,}7 \cdot (21 – 4{,}8)$

$y = 3202{,}74$

Tolkning

Modellen siger, at familiens olieforbrug vil falde fra 3.500 liter til 3.202,74 liter. På grund af afrundinger i de data, der er anvendt, bør facit afrundes til nærmeste hele 100.

Modellens svar er altså:
Forvendtet forbrug: 3.200 liter olie svarende til en besparelse på 300 liter.

Vurdering

Der er nogle forhold modellen ikke tager højde for. Her er blot nævnt et par:

- Hvordan med blæst? Blæst har også indflydelse på opvarmnings-behovet, men hvordan og hvor meget og vil blæsten også ændre sig med klimaforandringen.
- Og hvad med solskins-timer?

Samlet vurdering

Familien kan regne med at spare ca. 300 liter olie under forudsætning af, at alle andre faktorer, der har indflydelse på deres brændselsforbrug forbliver uændrede.