

brikkerne til
regning & matematik

grafer og funktioner

basis+G



preben bernitt

brikkerne

til

regning & matematik

grafer og funktioner, G

ISBN: 978-87-9288-11-4

2. Udgave som E-bog

© 2010 by bernitt-matematik.dk

Kopiering er kun tilladt efter aftale med bernitt-matematik.dk.

Læs nærmere om dette på

www.bernitt-matematik.dk

eller kontakt nedenstående adresse.

DEMO

bernitt-matematik.dk

mail@bernitt-matematik.dk

Fjordvej 6

4300 Holbæk

Forord

Hæftet er et af ti, der er udarbejdet til undervisning på VUC på niveauerne **basis+G** og dette indeholder *kernestoffet*, som det er beskrevet om funktioner i undervisnings-vejledningen om **G**.

Dette er en *beta-udgave*, der er udarbejdet med baggrund i den vejledning om undervisning på VUC, der udkom i 2009. I forhold til de krav til det faglige indhold, den enkelte kursist eller hold stiller, kan der være indhold, der springes over.

bernit-matematik.dk fralægger sig ethvert ansvar for eventuelle følger af at anvende hæftet.

Siderne er opdelt således, at først forklares og vises med eksempler og derefter er der opgaver, man skal løse. Hvis man kan se at man uden vanskelighed kan løse opgaverne, kan man springe dem over.

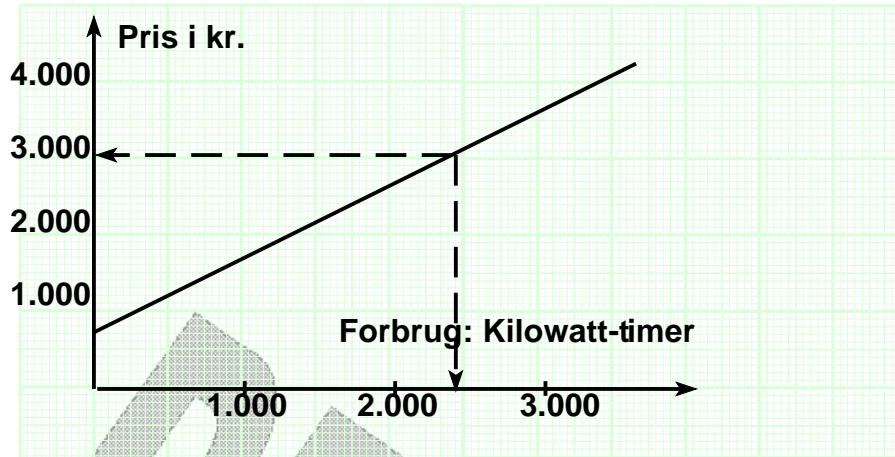
Under opgaverne står en henvisning til bagerst i hæftet, hvor reglerne, der er arbejdet med blive beskrevet. Når man har løst opgaverne er det en god idé, at læse dette, så man er sikker på, at have lært reglerne.

Fra side 22 er facitliste.

Aflæsning af koordinatsystem

Eksempel 1:

Tegningen herunder kan bruges til at bestemme prisen for dit el-forbrug. Du vil bruge tegningen til at finde prisen for et el-forbrug på 2.400 kilowatt-timer.



Svaret er en pris på 3.100 kr.

Forklaring:

Et koordinatsystem består af:

Den vandrette tallinie: 1. akse

Den lodrette tallinie: 2. akse

Begge akser har tallet 0, hvor de krydser hinanden.

1. akse og 2. akse viser de to ting, der er sammenhæng mellem, og grafen viser sammenhængen.

1. akse bruges som regel til den ting, som man kender, og anden akse til det, man vil have regnet ud.

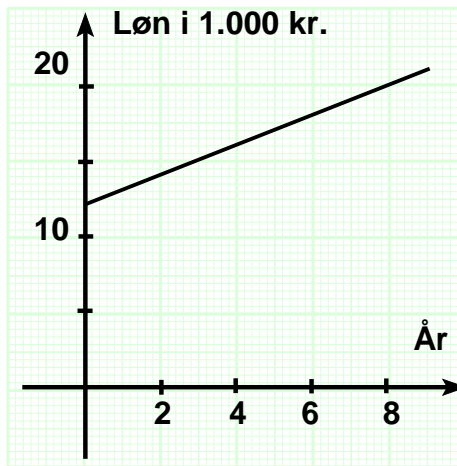
Hvert sted på grafen viser to tal, der hører sammen. I eksemplet er vist, at tallene 2.400 kilowatttimer og 3.100 kr. hører sammen.

Et tal-par kan også skrives sådan:

(2.400 kilowatttimer , 3.100 kr.)

Dette kaldes for et koordinatsæt. Det første tal står på 1. akse og kaldes 1. koordinaten. Det andet tal står på 2. akse og kaldes 2. koordinaten.

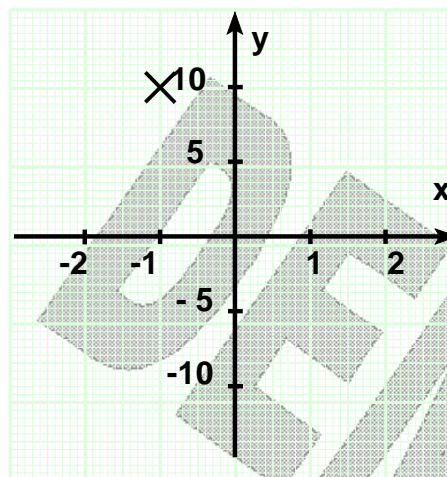
1



Grafen viser sammenhængen mellem det antal år en tjenestemand er ansat og lønnen.

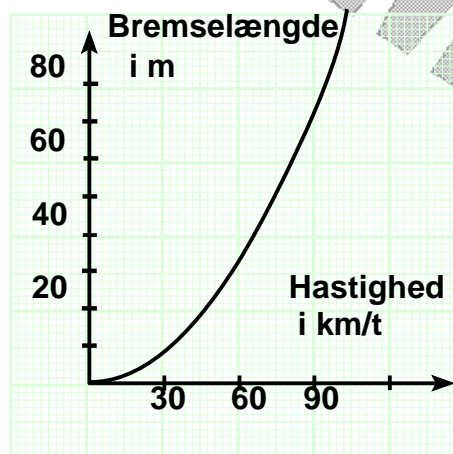
- Hvad er begyndelseslønnen?
- Hvad er lønnen efter fem år?
- Hvor længe skal man være ansat for at tjene 18.500 kr?

2



- Hvad er enheden på 1. akse?
- Hvad er enheden på 2. akse?
- Skriv krydssets koordinatsæt.

3

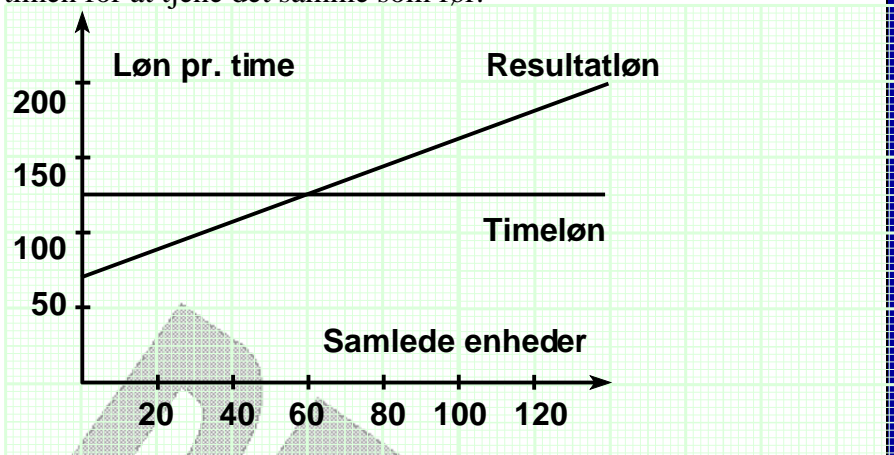


- Hvad viser grafen?
- Hvad er bremselængden, hvis man kører 60 km/t?
- Hvor hurtigt kører man, hvis bremselængden er 45 m?

Eksempel 2:

Din arbejdsgiver vil ændre din løn fra at være timeløn til at være en blanding af timeløn og løn for det arbejde, du har udført (resultat-løn). Han har vist det med grafen herunder.

Du vil finde ud af, hvor meget arbejde du skal udføre i timen for at tjene det samme som før.



Du skal samle 60 enheder pr. time for at tjene det samme med resultat-løn, som du tjente med timeløn.

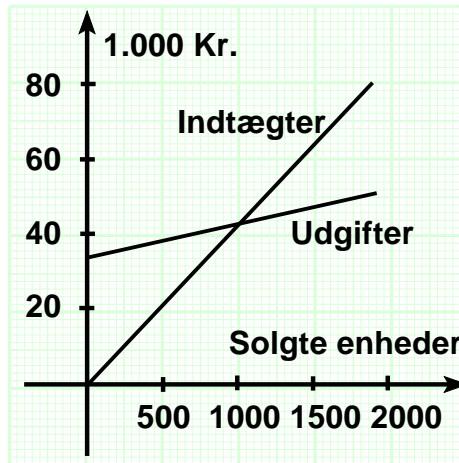
Forklaring:

Man kan i et koordinatsystem sammenligne, hvordan to ting udvikler sig i forhold til hinanden. I eksemplet viser den vandrette graf, at timelønnen er uafhængig af antal samlede enheder, og at den var på 125 kr.

Den stigende graf viser, hvordan resultat-lønnen vokser med antallet af enheder man samler.

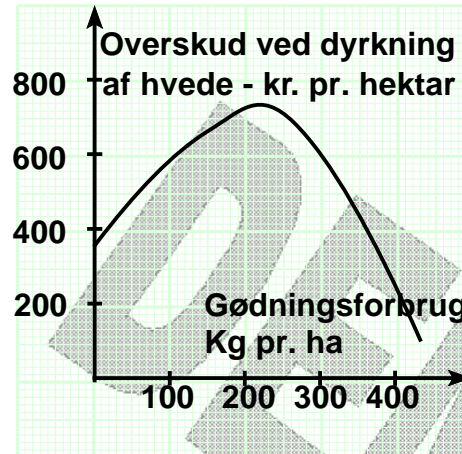
Op til 60 samlede enheder ligger resultat-lønnens graf under timelønnens: Resultat-lønnen giver mindre end timelønnen. Hvor de to grafer skærer hinanden, giver de den samme, løn og derefter giver resultat-lønnen mest.

1



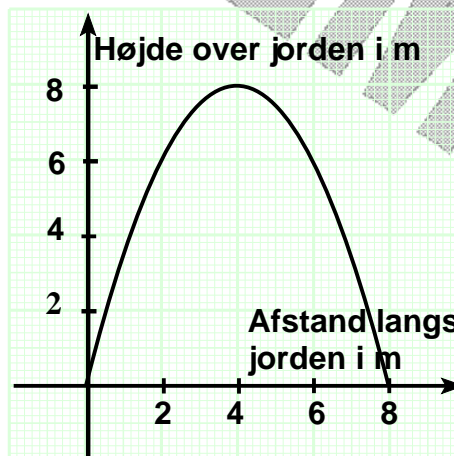
- Hvad viser graferne?
- Hvor meget skal, der sælges, før der er overskud?
- Hvor stort er overskuddet, hvis der sælges 1500 enheder?

2



- Hvad viser grafen?
- Hvor meget gødning skal man bruge for at tjene mest?

3



Grafen viser en bolds bane.

- Hvor højt kommer bolden?
- Hvor højt er bolden oppe 5 m fra det sted, den kastes?

Om fagudtryk og om aflæsning af grafer på side 28

Funktionsforskrift

Eksempel:

I brochuren fra el-selskabet kan du også læse, hvordan du selv kan beregne el-udgiften. Der står:

"Den samlede pris for elforbruget beregnes med 0,985 kr. pr. kilowatt-time tillagt en fast afgift på 750 kr."

Du vil skrive dette som en formel, der viser sammenhængen mellem prisen og forbruget, og derefter bruge formlen til at finde prisen for et forbrug på 4.500 kilowatt-timer.

Pris for elforbrug i kr.: P

Forbrug i kilowatt-timer: F

$$P = 0,985F + 750$$

$$P = 0,985 \cdot 4.500 + 750$$

$$P = 5.182,5$$

Prisen bliver 5.182,50 kr.

Forklaring:

Grafen på side 4 er lavet ud fra en anvisning af, hvordan man regner elprisen ud. Sådan en anvisning kaldes for en funktionsforskrift.

Funktionsforskrifter kan skrives med almindelige ord eller med en formel, der skal være opbygget sådan:

Foran lighedstegnet står det, som man kan regne ud, og efter lighedstegnet det regnestykke, som man skal udføre. Er der flere led i regnestykket, skriver man først det led, der indeholder bogstavet.

- 1 Du kan udregne prisen i danske kr. for et vist antal Euro ved at gange antallet af Euro med 7,40.
 - Lav en formel, der viser sammenhængen mellem antal Euro og prisen på dem i danske kr.
 - Brug formlen til at finde prisen på 250 Euro.

- 2** Man kan finde prisen for en taxatur ved at gange 10 med den kørte afstand i km og lægge 20 til.
- Lav en formel, der viser sammenhængen mellem kørt afstand og pris.
 - Brug formlen til at finde prisen på en taxa-tur på 12 km.
- 3** Man kan finde en cirkels areal i m^2 ved at gange dens tværmål målt i m med sig selv og med tallet 0,785.
- Skriv en formel, der viser sammenhængen mellem en cirkels tværmål og dens areal.
 - Brug formlen til at finde arealet for en cirkel, der har et tværmål på 2 m.
- 4** Man kan finde prisen for at bruge et elektrisk apparat ved at gange det antal timer apparatet er i brug med dets Watt-tal og dele med 1.000.
- Lav en formel, der viser sammenhængen mellem pris og det antal timer man lader en lampe med et watt-tal på 50 watt brænde.
 - Lav også en formel for et elapparat med watt-tallet 80 watt.
- 5** Man kan finde vægten i kg af en jerngenstand ved at gange dens rumfang i liter med 7,2.
Er genstanden lavet af aluminium, skal man gange dens rumfang med 3,1.
- Lav en formel, der viser sammenhængen mellem en jerngenstands rumfang og vægt.
 - Lav også en formel for en genstand af aluminium.
 - Brug formlerne til at finde ud af, hvor stor forskel det gør om en genstand, der fylder 0,3 liter, er lavet af jern eller aluminium.

Om funktionsforskrift på side 29

Tegning af 1. grads funktioner

Eksempel 1:

Du vil tegne en graf, der viser sammenhængen mellem el-forbrug og pris. Grafen skal kunne bruges til forbrug mellem 0 kilowatt-timer og 7.000 kilowatt-timer.

Du udregner, hvor meget forbrug på 0 kilowatt-timer, 4.000 kilowatt-timer og 7.000 kilowatt-timer koster ved at bruge formlen fra side 8:

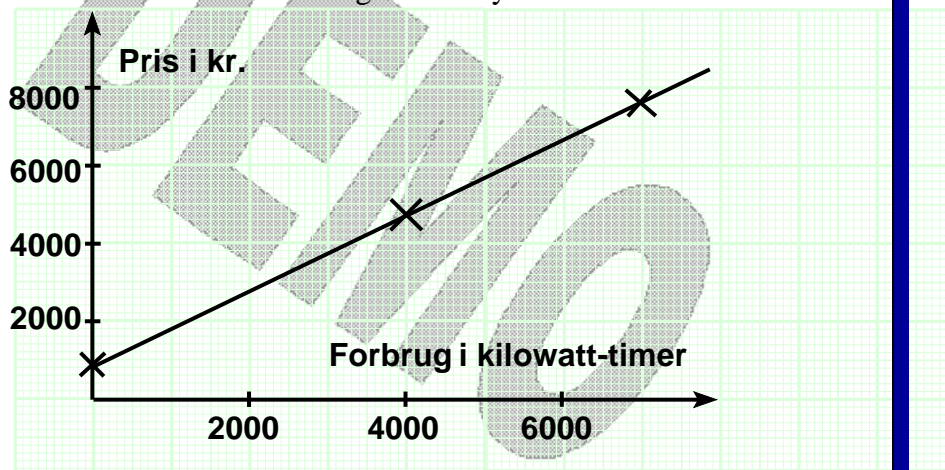
0 kilowatt-timer koster 750 kr.

4.000 kilowatt-timer koster 4.690 kr.

7.000 kilowatt-timer koster 7.640 kr.

Derefter tegner du koordinatsystemets akser, så der bliver plads til tallene fra 0 til 7.000 på 1. akse og mindst op til 7.640 på 2. akse.

Så afmærkes de tre priser med krydser. Med linealen laver du til slut en ret linie gennem krydserne.



Forklaring:

Funktioner, der har en ret linie som graf kaldes for 1. grads funktioner. Den sikreste måde at tegne en 1. grads funktions graf på er at udregne tre eksempler på sammenhængen - f. eks. i hver ende af grafen og på midten og derefter trække en linie gennem dem. Ligger de tre punkter ikke på en ret linie, har man regnet forkert, eller det er ikke en 1. grads funktion.

- 1** En bank fortæller at renten er 11%. Det vil sige, at hvis man skal beregne, hvad det koster at låne penge i et år (årsrenten) skal man gange låne-beløbet med 11 og dele med 100.
- Lav en formel, der viser sammenhængen mellem lånebeløbets størrelse og årsrenten.
 - Brug formelen til at finde hvad det koster at låne 0 kr., 5.000 kr. og 20.000 kr.
 - Vis sammenhængen i et koordinatsystem.
 - Brug koordinatsystemet til at afgøre, hvad årsrenten er for et lånebeløb på 10.000 kr.
- 2** En kedel med vand opvarmes og temperaturen stiger med 20 grader pr. minut. Vandet starter med at være 15 grader varmt.
- Lav en formel, der viser sammenhængen vandets temperatur og den tid kedlen har været under opvarmning.
 - Udregn tre eksempler på sammenhængen mellem tid og temperatur.
 - Vis sammenhængen i et koordinatsystem.
 - Brug koordinatsystemet til at afgøre, hvornår vandet er 100 grader varmt.
- 3** Kører man 90 km/t, kan man finde, hvor mange langt man kan køre ved at gange antallet af køre-minutter med 1,5 km.
- Vis sammenhængen i et koordinatsystem, sådan at det kan bruges til at finde køretiden for afstande fra 0 til 500 km..
 - Brug koordinatsystemet til at afgøre, hvor lang tid det vil tage at køre 200 km.
- 4** Prisen for et abonnement for en mobiltelefon var et månedligt gebyr på 150 kr. og 2,20 kr. pr. minut du brugte den.
- Vis sammenhængen mellem den tid man bruger telefonen på en måned og den samlede pris i et koordinatsystem.
 - Hvad koster det, hvis man bruger telefonen 55 minutter på en måned?

Om tegning af 1. grads funktioner på side 29

Eksempel 2:

Du vil lave en graf, der viser sammenhængen mellem prisen på en tur med taxa, og det antal km turen er på. Du ved, at man betaler 10 kr. pr. km og et start gebyr på 20 kr. Som formel ser det således ud:

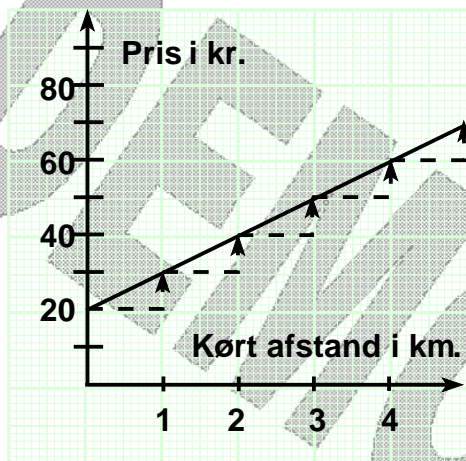
Kørt afstand i km: A

Pris i kr.: P

$$P = 10A + 20$$

I stedet for at udregne tre eksempler på sammenhængen mellem den kørte afstand og prisen, kan du tegne grafen ved at bruge følgende tanke:

Grafen må begynde i tallet 20 på 2. aksen, fordi der er et startgebyr på 20 kr. Når stignings-taksten er 10 kr. pr. km, må grafen derefter skulle stige med 10 kr. for hver km, den går mod højre.



Forklaring:

I stedet for at tegne 1. grads funktioner som vist i eksempel 1 kan man bruge metoden herover.

Man begynder med at finde det sted, hvor grafen skal begynde på 2. aksen:

Er der en startværdi skal grafen begynde i den, ellers begynder den i 0.

Fra begyndelses-stedet går man en enhed mod højre og derefter så meget op, som stignings-takten er.

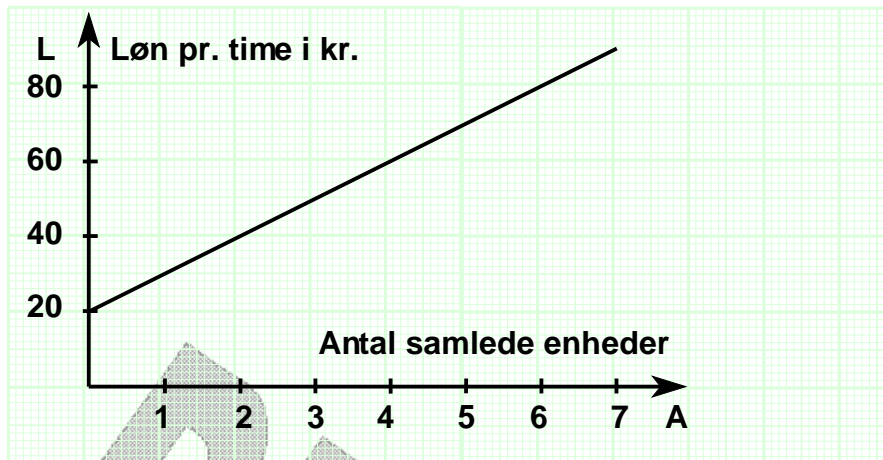
- 1** Tilslutningsafgiften til dit vandværk er 1.500 kr. pr år.
Derefter koster det 2 kr. pr. m^3 vand man bruger.
- Vis i et koordinatsystem sammenhængen mellem det antal m^3 du bruger, og det du skal betale.
 - Brug grafen til at finde, hvad det koster at bruge 175 m^3 .
- 2** Du skal betale dit telefonselskab 331,50 kr. hver tredive måned for at have telefon.
Derudover skal du betale 0,235 kr. for hvert minut, du taler.
- Tegn en graf, der viser sammenhængen mellem det antal minutter man taler, og det man skal betale.
 - Brug grafen til at finde ud af, hvad din telefonregning bliver, hvis du i løbet af tre måneder taler 455 minutter.
- 3** Et amerikansk dollar 6,85 kr., og det koster et fast gebyr på 20 kr. at veksle penge i banken.
- Tegn en graf der viser sammenhængen mellem det antal dollar man vil købe og prisen. Det skal være muligt at aflæse prisen for 1.000 dollar.
 - Brug grafen til at finde, hvad 850 dollar koster.
- 4** Det koster 150 kr. om måneden at være tilsluttet Internettet.
Derudover betales 10 øre pr. minut, du bruger forbindelsen.
- Tegn en graf, der viser sammenhængen mellem den tid, du bruger forbindelsen, og det du skal betale.
 - Brug grafen til at finde ud af, hvad det koster at bruge forbindelsen i 250 minutter i løbet af en måned..
- 5** Ved at betale 250 kr. for at være medlem af en svømmeklub, kan du få adgang til svømmehallen for 5 kr. pr. time.
Hvis du ikke er medlem, skal du betale 20 kr. pr. time.
- Tegn grafer, der viser de to muligheder.
 - Brug graferne til at finde ud af hvor ofte du skal gå i svømmehallen, for at det kan betale sig for dig at være medlem.

Om tegning af 1. grads funktioner på side 29

En ret linies forskrift

Eksempel:

Du har set tegningen herunder og vil finde ud af hvilken formel, der er brugt til at tegne grafen.



Grafen begynder på 2. akse i 20 kr. Det må være et grundbeløb, der skal være startværdi i formelen.

Grafen stiger med 10 kr., for hver enhed man går mod højre. Det må være en takst pr. enhed, der skal være stignings-takten i formelen. Formlen må så se således ud:

Løn: L

Antal samlede enheder: A

$$L = 10A + 20$$

Forklaring:

Alle rette linier, der er tegnet i et koordinatsystem har en formel, der er opbygget sådan:

$$y = 10x + 20$$

- y er det, der er vist på 2. akse.
- På 10-tallets plads står stignings-takten.
- x er det, der er vist på 1. akse.
- På 20-tallets står startværdien.

Den eneste undtagelse fra dette er lodrette linier, der har formler som f. eks.:

$$x = 3$$

- 1** Brug formelen herunder:
 $y = 2x + 3$
- Hvad er startværdien?
 - Hvad er stigningstakten?
 - Tegn grafen i et koordinatsystem.

- 2** Brug formelen herunder:
 $y = x + 3$
- Hvad er startværdien?
 - Hvad er stigningstakten?
 - Tegn grafen i et koordinatsystem.

- 3** Brug formelen herunder:
 $y = 2x$
- Hvad er startværdien?
 - Hvad er stigningstakten?
 - Tegn grafen i et koordinatsystem.

- 4** Brug formelen herunder.
 $y = 4x - 3$
- Hvad er startværdien?
 - Hvad er stigningstakten?
 - Tegn grafen i et koordinatsystem.

- 5** Brug formelen herunder.
 $y = -2x + 6$
- Hvad er startværdien?
 - Hvad er stigningstakten?
 - Tegn grafen i et koordinatsystem.

6 I formlen herunder er der intet led med x. Det svarer til, at der står 0x.

$$y = 3$$

- Hvad er startværdien?
- Hvad er stigningstakten?
- Tegn grafen i et koordinatsystem.

7 Brug formlen herunder.

$$y = x$$

- Hvad er startværdien?
- Hvad er stigningstakten?
- Tegn grafen i et koordinatsystem.

8 Du skal besvare spørgsmålene herunder. Hvis der er et spørgsmål, du ikke kan svare på, så prøv at gå tilbage og se på dine løsninger på opgave 1 - 7 og find et eksempel, der svarer til spørgsmålet.

- Hvad skal stigningstakten være, for at grafen stiger fra venstre mod højre?
- Hvad skal stigningstakten være, for at grafen falder fra venstre mod højre?
- Hvad skal stigningstakten være, for at grafen er vandret?
- Hvad skal startværdien være, for at grafen går igennem det sted, hvor 1. akse og 2. akse mødes?

9 Du skal bruge følgende tre formler:

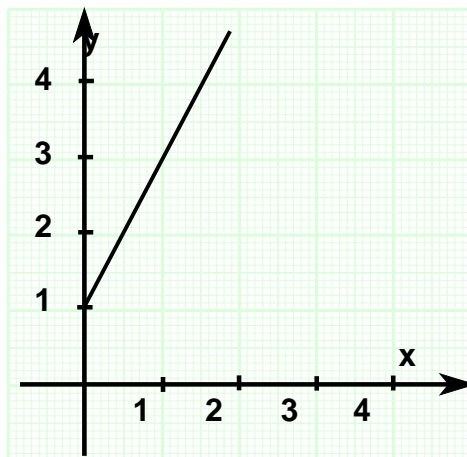
$$y = x + 1$$

$$y = -x + 3$$

$$y = 2$$

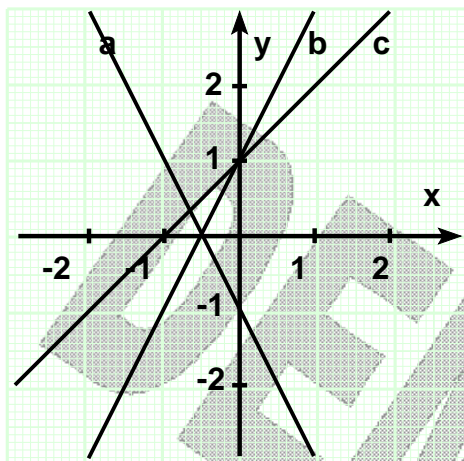
- Tegn grafer for formlerne. Du skal lave alle tre i samme koordinatsystem.
- Angiv koordinat-sættet for det sted, de skærer hinanden.

10



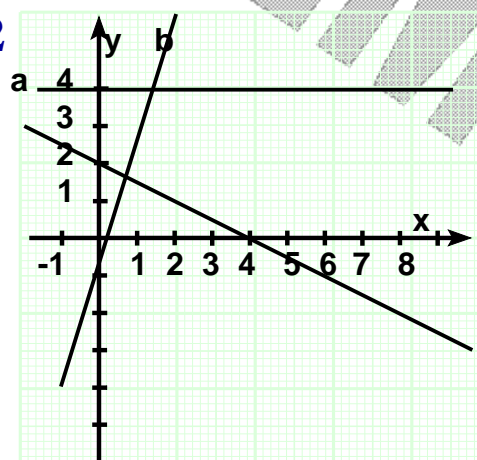
- Hvad er grafens stigningstakt?
- Hvad er startværdien?
- Skriv grafens formel.

11



- Skriv en formel til hver graf.

12



- Skriv en formel til hver graf.

Om en ret linies forskrift på side 30

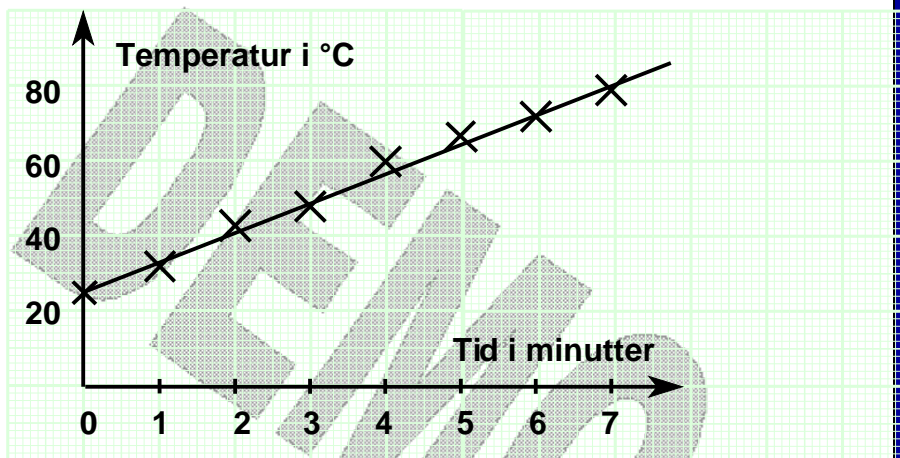
Middel-graf

Eksempel:

Du har lavet en række målinger af, hvordan temperaturen har udviklet sig i en beholder, hvori der foregik en kemisk proces. Resultaterne fremgår af skemaet:

Tid i min.	0	1	2	3	4	5	6	7
Temp.	25°	32°	43°	48°	60°	67°	72°	79°

Du viser resultaterne i et koordinatsystem og vil lave en formel, der viser sammenhængen.



Krydserne ligger ikke helt på en ret linie, men den der er tegnet passer bedst. Den har en startværdi på 25 og en stignings-takt på 8. Formlen må så være:

Tid i minutter: x
Temperatur i °C: y
 $y = 8x + 25$

Forklaring:

Måle-resultater vil ofte være lidt unøjagtige. Når man skal forbinde dem med en graf, skal man sørge for, at de enkelte resultater fordeler sig ligeligt på begge sider af grafen. Sådant en graf kaldes en middel-graf.

- 1** Du har målt, hvor langt et græsstrå er fra dag til dag. Forsøget har givet følgende resultater:

Dag	0	1	2	3	4	5	6	7
cm	1,1	1,4	1,6	2,0	2,5	2,7	2,9	3,4

- Lav et koordinatsystem, der kan bruges til at vise resultaterne og afmærk resultaterne.
 - Lav en middel graf.
 - Skriv formelen for middel grafen op.
 - Brug formelen til at udregne, hvor langt græsset vil være efter 20 dage.
 - Kan du stole på resultatet?
- 2** Du har lavet et forsøg for at undersøge sammenhængen mellem hvor meget strøm (Amp.), der løber igennem et elektrisk apparat, og det watt-tal producenten har oplyst. Forsøget har givet følgende resultater.

Watt	30	50	60	100	2000	5000
Amp.	0,1	0,2	0,3	0,5	9,1	22,7

- Lav et koordinatsystem, der kan bruges til at vise resultaterne.
 - Afmærk resultaterne og lav en middelgraf.
 - Skriv formelen for middelgraf.
- 3** Du har fået resultaterne af en undersøgelse af sammenhængen mellem bølgehøjden uden for en havn, og de bevægelser et af skibene i havnen laver. Resultaterne ser sådan ud.

Bølgehøjde i m	0,1	0,5	0,8	1,0	3,1	3,6	4,2
Bevægelse i °	0	2	3	3	8	14	16

- Vis resultaterne i et koordinatsystem, lav en middelgraf og en formel.

Om middelgraf på side 30

Ikke alt er 1. grads funktioner

Eksempel:

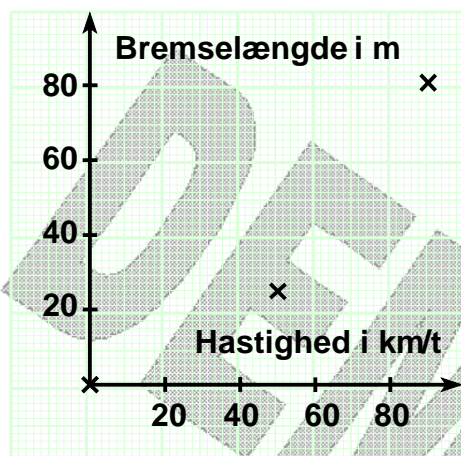
Du har formelen herunder, der viser hvordan en bils bremselængde afhænger af dens hastighed og vil tegne grafen.

Hastighed i km/t: H

Bremselængde på tør vej i m: B

$$B = 0,01H^2$$

Du udregner bremselængderne for hastighederne 0 km/t, 50 km/t og 90 km/t og viser dem i et koordinatsystem.



Du kan ikke forbinde punkterne med en ret linie og må derfor udregne nogle flere eksempler og forsøge at forbinde dem med en jævn kurve.

Forklaring:

For at en sammenhæng er en 1. grads funktion kræves det, at den kan beskrives med en formel, der ser ud som forklaret på side 14. F. eks.:

$$y = 10x + 20$$

Formlen i eksemplet indeholder H^2 og er derfor ikke en 1. grads funktion. Punkterne ligger derfor ikke på en ret linie.

- 1** Når en ting falder, vil dens hastighed i begyndelsen blive større og større.
Formlen herunder beskriver sammenhængen mellem hvor lang tid tingen er faldet og hvor langt den er faldet.

Faldtid i sekunder: t

Faldhøjde i m: H

$$H = 9,8t^2$$

- Er det en 1. grads funktion?
- Udregn faldhøjden ved 0 sekunder, 1 sekund, 2 sekunder, 3 sekunder og 4 sekunder.
- Afmærk resultaterne i et koordinatsystem.
- Lav en blød kurve, der forbinder resultaterne.

- 2** Jo større hastighed man kører med, jo kortere tid tager det at køre 100 km.
Formlen herunder viser sammenhængen.

Hastighed i km/t: H

Køretid for 100 km i minutter: T

$$T = \frac{6000}{H}$$

- Udregn køretiden ved hastigheder på 30 km/t, 60 km/t og 100 km/t.
- Afmærk resultaterne i et koordinatsystem.
- Er det en 1. grads funktion?

- 3** I skemaet herunder kan du se, hvad der er sket med obligationskurserne gennem en uge.

Dag	Man	Tirs	Ons	Tors	Fre
Kurs	98,7	96,0	95,1	98,0	96,2

- Afmærk tallene i et koordinatsystem.
- Tror du, der er en sammenhæng mellem ugedagene og kursen?

Om andre funktioner på side 31

Ikke alt er 1. grads funktioner 21