brikkerne
til regning & matematik

Sprog og arbejdsmetode

F+E+D

preben bernitt

brikkerne til
regning & matematik
sprog og arbejdsmetode F+E+D
ISBN: 978-87-92488-36-7
1. udgave som E-bog

Læs mere på: www.bernitt-matematik.dk

Forord

Matematik er et fag på linie med andre praktiske og teoretiske fag som tømrer, snedker, historie og samfundsfag.

Alle fag har sit særlige sprog og sine særlige arbejdsmetoder. Da matematik er et grundlæggende fag for rigtig mange andre fag, er det specielt vigtigt at lære matematikkens sprog og arbejdsmetoder at kende.

Matematik har ikke alene sine egne fagudtryk. Dagligdags ord bruges også, men hvor vi i dgalig-sproget ikke altid behøver at være præsice, da har udtrykkene en helt præcis betydning i matematik, som man skal lære.

Første del af dette hæfte (fra side 4) omhandler særlige sider af matematikkens sprog:

- matematikkens særlige brug af dagligdags udtryk
- sætningsopbygning i matematiske tekster

Denne del er opbygget som en alfabetisk ordliste, hvor ordene først vises i en sætning hentet fra matematisk fagliteratur og dernæst forklares.

Man kan med fordel starte arbejdet med ordlisten, ved at slå op på sætninger i matematik og derefter følge opfordringen til, at finde alle de ord i ordlisten, der bruges til at give ordrer i matematik..

Listen kan også bruges som opslagsværk i arbejde med matematiske fag-tekster.

Egentlige fagudtryk såsom, kvadrat, rektangel, rumfang, funktion m.v. kan man læse om i opslagsbogen: Slå det dog op!

Anden del fra side 12 giver en indføring i fire af matematikkens

arbejdsmetoder:
- ræsonnement
- bevisførelse
- formel udledning
- modelbygning

Denne del indeholder kommenterede eksempler. Eksemplerne findes også som appendix i nogle af de øvrige hæfter til F+E+D. Der kan arbejdes med eksemplerne i tilfældig rækkefølge.

Arbejdet med denne del af hæftet, kan foregå ved at kursister fremlægger eksemplerne mundtligt i par-arbejde, gruppe- eller klassevis. Det vil være naturligt, at dette lægger op til kursisternes forarbejde til den mundtlige del-prøve efter trin D.

Ordliste

Aflæs og aflæsning ”*Aflæs* afstanden mellem København og Kalundborg” ” Find ved *aflæsning* afstanden mellem København og Kalundborg” Ordren: *Aflæs* betyder det samme som at læse men bruges specielt når svaret skal findes på en tegning eller i et skema. *Aflæs* bruges når man vil give ordre om, at man ikke skal beregne svaret på opgaven.
Afsæt ”*Afsæt* punktet P” Ordren: *Afsæt* betyder det samme som at tegne. At *afsætte* punktet betyder at tegne, hvor punktet er.
Alment gældende ”Det er *alment gældende* at arealet af en trekant er ½*hg*” *Alment gældende*, betyder at det altid gælder.
Angiv ”*Angiv* størrelsen af vinkel v” Ordren: *Angiv* bruges når det er frit hvordan man finder svaret. Der er altså ikke noget krav om, at man skal finde svaret ved beregning, måling, aflæsning eller andet.
Argument, argumentér ”*Argumentér* for, at det bedst kan betale sig at købe et abonnement på avisen” Et *argument* er en sandt *udsagn*.
Beregn og beregning ”*Beregn* størrelsen af vinkel v” ”Find ved *beregning* størrelsen af vinkel v” Ordren: *Beregn* bruges når svaret på opgaven skal findes ved hjælp af en udregning. Aflæsning, måling eller gæt er altså ikke godt nok.

Beskriv og beskrivelse "*Beskriv* forskellen på et trapetz og et rektangel" "Der ønskes en *beskrivelse* af forskellen på et trapetz og et rektangel". Ordren: *beskriv* bruges når der ikke er krav til den form svaret har. En *beskrivelse* kan være at svare med sine egne ord.
Bestem "*Bestem* afstanden mellem Kalundborg og København" Ordren: *Bestem* bruges når der ikke er noget krav til, hvordan man finder svaret.
Besvar "*Besvar* følgende spørgsmål." Ordren: *Besvar* betyder det samme som: at svare på.
Bevis "*Bevis* følgende: $2(x - 3) = 12 \Leftrightarrow x = 9$" Ordren: *Bevis* bruges når der er krav om, at forklare en sammenhæng med en række sande *argumenter*, der følger *logisk* af hinanden
Bevis, et "Følgende er *et bevis* for formlen for arealet af et trapetz." Udtrykket *Et* bevis bruges som en understregning af, at der også findes andre måder, at bevise sammenhængen på.
Defineret, definition "Et paralellogram er *defineret* som en figur der….." En *definition* er en beskrivelse af et begreb eller en regel. Til forskel fra en dagligdags beskrivelse, er en præcis.
Eftervis "*Eftervis* at når prisen med moms er 250 kr., så er prisen uden moms 200 kr." Ordren: *Eftervis* bruges når man skal vise at påstanden er sand.

Eksisterer “Vis at der *eksisterer* et tal a, for hvilket det gælder at $a^3 = -1$” *Eksisterer* betyder det samme som: at der findes.
Fagudtryk “Beskriv et paralellogram ved anvendelse af matematiske *fagudtryk*.” *Fagudtryk* er ord og sætninger, der har en *defineret* betydning.
Falsk ”Vis at $2x > x – 2$ er *falsk* for $x = -4$” Et matematiske udsagn kan enten være *falsk* eller *sandt.*
Find ”*Find* x når $y = 12$” Ordren: *Find* bruges når der ikke stilles krav til, hvordan man vil finde svaret.
For ethvert ”For ethvert rationelt tal gælder….” *For ethvert* bruges stedet for at skrive *for alle*
Forklar ”*Forklar* hvorfor både –5 og +5 er løsning….” Ordren: *Forklar* bruges når der ønskes *ræsonnemen*t.
Færdiggør ”*Færdiggør* tegningen” Ordren: *Færdiggør* betyder det samme som: at gøre det færdigt.
Givet ”*Givet* en funktion med forskriften …” *Givet* betyder det samme som: ”der er”.

Gældende "I det antages at følgende forskrift er *gældende* .... " *Gældende* betyder det samme som: "at det er rigtigt".
gælder at "Idet det *gælder at* rumfanget kan beregnes med formlen ...." *Gælder at* betyder det samme som: "det er rigtigt at".
Gør rede for "*Gør rede for* at funktionen skærer 1. aksen ...." Ordren: *Gør rede for* er en ordre om at *ræsonnere*.
Her af ses "*Her af ses* at funktioner med forskriften …" Bruges når der kan ræsonneres fra et trin til et andet.
Indsæt "*Indsæt* x = 2 og find y" Ordren: *Indsæt* bruges, når der gives besked på at erstatte et bogstav med et tal.
Indtegn "*Indtegn* grafen ...." Ordren: *Indtegn* bruges når der skal tegnes ovenpå en anden tegning.
kommentér "*Kommentér* udviklingen." Ordren: *Kommentér* bruges når man skal beskrive med egne ord.
konstruer "*Konstruer* trekant ABC". Ordren: *Konstruér*, bruges når man skal bruge en bestemt fremgangsmåde. Det kan f. eks. være at bruge lineal, vinkelmåler og passer.

Model

"Opstil en *model* for udviklingen."

En *model* er et andet ord for et forenklet billede af en ting.

Når .. så, når … da

"*Når* omkredsen fordobles *da* fire-dobles arealet"

Bruges i følgeslutninger. Må kun bruges når sætningen er sand, når den læses begge veje.

Opstil

"*Opstil* en model for sammenhængen."

Ordren: *Opstil* er en ordre om at skrive og forklare.

Redegørelse

"Der ønskes en *redegørelse* for …."

En *redegørelse* består både af en forklaring og fascist..

Ræsonnere

"Bevis ved at *ræsonnere* at …."

At *ræsonnere* er at tænke en række af tanker, der følger logisk af hinanden.

Sammenlign

"*Sammenlign* de to tilbud."

Ordren: *Sammenlign* er en ordre om at finde forskelle og ligheder.

Slutte sig til, Følgeslutning

"Heraf kan man *slutte sig til,* at $x = y^2$"

Bruges når der er en *logisk* sammenhæng.

Sæt

"*Sæt* $x = 6$"

Sæt bruges til at fortælle om en forudsætning, der er gældende.

Sætninger i matematik

Passiv form

“Kampenes rækkefølge *bestemmes* ved lodtrækning.”

I mange sætninger, kan man ikke se, hvem der gør hvad. Hvem er det f.eks., der afgør kampenes rækkefølge? Det er ordet: *bestemmes* (passiv form af: du bestemmer), der gør, at du ikke får at vide, hvem der bestemmer.

Grunden til, at man ikke kan se, hvem der gør hvad er, at det ikke har betydning for løsning af opgaven.

Andre ord, der bruges på samme måde: *Læses*, *beregnes*, *skrives* og *kaldes*.

Man og vi

“*Man* kan finde arealet af et trapez ved at gange højden med grundlinien.”

“*Vi* ser heraf, at $a^2 + b^2 = c^2$.”

Man og *vi* bruges til at understrege at alle kan bruge metoden eller forstå udsagnet.

Ordrer

”*Beregn* størrelsen af siden a”

Mange sætninger i matematik er opbygget som en *ordre*: Læseren får en ordre om at udføre en bestemt arbejde. Der er mange ord, der bruges til at give *ordrer* i matematik og de har alle sammen en lidt forskellig betydning. Find dem i ordlisten.

tilnærmelse

“Angiv en lineær funktion, der med *tilnærmelse* er en model for udviklingen.”

Tilnærmelse er et ord for noget der passer sammen, uden at være ens.

Udfyld

“*Udfyld* skemaet.”

Ordren: *Udfyld* bruges når der ikke er krav til forklaring.

udtryk

“Følgende *udtryk* beskriver sammenhængen ……”

Et *udtryk* er en sætning, der ikke er et *udsagn*.

Undersøg “*Undersøg* om bremselængden ved 60 km/t overstiger 15 m.” Ordren: *Undersøg* bruges når det står frit for, hvordan man kommer frem til svaret.
Udledt “Af formlen for arealet af et paralellogram kan man *udlede* en formel for arealet af trekanter.” *Udlede* betyder at man ved hjælp af logiske argumenter finder frem til en ny sammenhæng.
Udsagn “Afgør om følgende *udsagn* er sandt eller falsk. Et *udsagn* er en påstand, der er enten sandt eller falsk. Se også: Åbent udsagn
Vis ”*Vis* at …” Når *Vis* bruges som ordre er det frit, hvilken metode man vil anvende.
Vurdér ”*Vurdér* hvilke af tilbudene, der bedst kan betale sig.” Ordren *Vurdér* bruges som ordre, når man skal komme med argumenter for resultatet.
Vælg ”*Vælg* den forskrift, der passer bedst.” Ordren: *Vælg* bruges som ordre, når det er nok bare at skrive sit valg uden at argumentere for det.

arbejdsmetode

På de følgende sider vises fire af matematikkens arbejdsmetoder:

- at ræsonnere
- at bevise
- at definere begreber og regler udlede formler
- at lave matematiske modeller

Et fælles træk for alle fire metoder er, at de foregår trinvis. At "kunne" et af eksemplerne består i, at du forstår den logiske sammenhæng mellem trin-ene og kan forklare den til andre.

Siderne er bygget op rundt omkring *eksempler* . Før og i nogle tilfælde efter eksemplet, er læse-stof, som kan gøre dig klogere på matematikkens arbejdsmetoder.

Eksemplerne er bedst egnet til at arbejde med, med henblik på at fremlægge eksemplerne mundtligt. Du kan f. eks. følge denne arbejdsplan:

- 1. gennemlæsning:
  Overblik - spring over trin du ikke forstår.

- 2. gennemlæsning:
  Denne gang lægger du vægt på at forstå alle trin.

- Øve sig på at gennemgå eksemplet:
  En gennemgang består i, at du på tavle eller papir skriver de enkelte trin, mens du mundtligt forklarer, den logiske sammenhæng mellem trin-ene. Du skal ikke lære eksemplet udenad, men skriv et manuskript, som du kan støtte dig til.

- Fremlæggelse:
  Det kræver, at du har en person eller gruppe, der er på niveau med dig selv og som kan stille kritiske spørgsmål til trin, du ikke forklarer tydeligt nok.

at ræsonnere (I)

Der findes principielt tre fremgangsmåder til løsning af et matematisk problem:

(1) Gætte en løsning og derefter eftervise, at løsningen passer
(2) Anvende en løsningsmetode, som man har fået meddelt af andre
(3) Ræsonnere sig frem til en løsning

Se f. eks. opgaven: ”En linie l er givet ved: $y = 2x - 3$.
Find liniens skæringspunkt med x-aksen”

At bruge (1) kan foregå ved gætte på forskellige værdier af x og indsætte dem indtil man rammer den værdi, der giver $y = 0$. Hvis man gætter med lidt omtanke, kaldes metoden for *Intuitiv løsningsmetode.*

At bruge (2) til løsning foregår f. eks. ved at bruge formlen:
Skæringspunkt med x-aksen: $(\frac{-b}{a},0) = (\frac{-(-3)}{2}, 0) = (1\frac{1}{2}, 0)$

At bruge (3) er en arbejdsproces der starter med at opstille en problemformulering, dernæst opstiller man en række *sande argumenter*, der tilsammen fører frem til en konklusion, der er løsning til problemformuleringen:

Eksempel 1

Problemformulering:
Hvad er skæringspunktet med x-aksen for linien: $y = 2x - 3$?

1. argument: Skæringspunktet med x-aksen har en y-værdi på 0
2. argument: Når $y = 0$ er $2x - 3 = 0$
3. argument: For at $2x - 3 = 0$ skal $2x$ være lig med 3
4. argument: Hvis $2x$ skal være lig med 3, må x være 1½.

Konklusion
Skæringspunkt med x-aksen i (1½ , 0)

Metoderne (1), (2) og (3) kan i de fleste situationer være lige gode, hvis formålet blot er at få løst et problem.

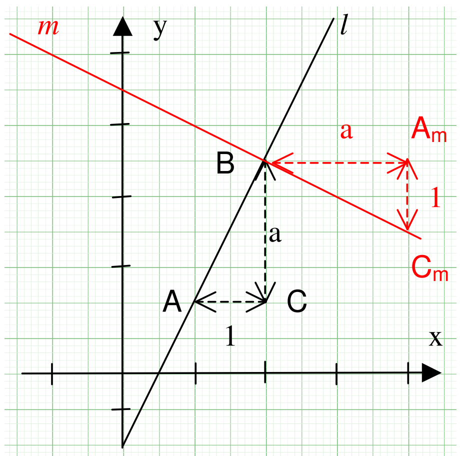
Metode (3) er dog at foretrække, når man også skal kunne forklare løsningen til andre. Og så giver det også en vis tilfredsstilelse, at man selv forstår, hvorfor løsningen er rigtig. Med denne metode bliver matematik en kilde til oplevelse: Nysgerrighed om ”hvorfor” bliver afsæt til den tilfredsstillende oplevelse, når man kan sige ”derfor”.

at ræsonnere (II)

at ræsonnere sig frem til en løsning bruge også, når man vil udtænke en almen gyldig sammenhæng. Alle formler og regnemetoder er resultatet af at ræsonnere. Du skal her se et eksempel på et sådant ræssonement.

Ræsonnementet handler om stignings-tallene for to linier, der står vinkelret på hinanden.

Eksempel 2



Problemformulering:
Er der en sammenhæng mellem stignings-tallet for to linier, der står vinkelret på hinanden og kan sammenhængen beskrives med en formel?

Argumenter:
Stignings-tallet a for linien *l* (den sorte linie) kan vises som en retvinklet trekant ABC, kateter med længden 1 og a og et stykke af linien *l* som hypotenuse.

Linien *m* skal stå vinkelret på linien *l* og kan fastlægges ved at dreje linien l og trekant ABC 90° omkring punktet B. Se trekant A_mBC_m og linien *m*.

Den røde trekants kateter udtrykker stigningen for linien *m*:
Når x forøges med a, forøges y med -1

Stigningstallet for en linie er forøgelsen af y når x forøges med 1. Stigningstallet for linien *m* er derfor: $\frac{-1}{a}$

Konklusion
Givet en linie med stigningstallet *a*.
Linier, der står vinkelret på denne, har stigningstal $\frac{-1}{a}$.

Om løsning af ligninger

Ordet “ligning” kommer af udtrykket “lig med”, og bruges til at beskrive, at man har at gøre med to ting, der er lige store.

$$-5 = x - 8$$

Her står at -5 er lige så stor som x - 8. Opgaven er jo så at finde det tal, der indsat på x-ets plads gør ligningen sand. Lige som andre matematiske problemer, kan dette løses på tre forskellige måder:

(1) gætte en løsning og eftervise at løsningen passer
(2) anvende en regnemetoder, meddelt af andre
(3) ræsonnere sig frem til en løsning

(1) kaldes også for intuitiv løsningsmetode. (2) er når man anvender regneregler for løsning af ligninger, uden egentlig at overveje, hvorfor de er rigtige. (3) kan foregår som beskrevet herunder:

“Hvis -5 er lige så stor som x - 8, da må det også gælde at -5 + 8 er lige så stor som x - 8 + 8, og dermed at -3 er lige så stor som x.
Altså har x størrelsen -3.”

Skrevet med almindeligt sprog, som herover, bliver ræsonnementer ofte meget vanskelige at læse - de er lettere at forstå, hvis de fortælles mundtligt. Derfor:

Ved *skriftlig* præsentation bruges matematiske symboler:

$$\begin{aligned} -5 &= x - 8 \quad \Leftrightarrow \\ -5 + 8 &= x - 8 + 8 \quad \Leftrightarrow \\ -3 &= x \end{aligned}$$

Her kan det dog ikke ses, om man blot har anvendt regler, meddelt af andre, eller man selv har ræsonneret.

Ved *mundtlig* præsentation skal det derimod fremgå, hvad man har tænkt.

Eksempel 3

Løs ligningen: $2(x - 5) = \dfrac{5 - x}{3}$ og forbered dig på *mundtlig præsentation* af din løsningsmetode.

Eksempel 4

Reglerne om hvordan man ophæver parenteser, er fremkommet ved ræsonnement, der bygger på definitionen af *parenteser* i et regneudtryk og i definitioner på *regnetegn* og *fortegn*:

Regnetegn og fortegn:
+a + -b
Alle tal har et fortegn (+ eller -), der skrives tæt foran tallet. Ofte udelader man fortegnet til positive tal.
Mellem tal og udtryk skrives regnetegn (+ , - , · eller :), der angiver hvordan tallene skal sammenregnes.

Parenteser: +a + (+b -c)

Parentesen betyder at tallene i parentesen *alle skal indgå i det regnestykke,* som står udenfor parentesen.

I ræsonnementerne anvendes også:
at lægge et positivt tal til eller trække det fra kan forenklet skrives som blot at lægge tallet til eller trække det fra:
+ +a = + a og - +a = - a
at lægge et negativt tal til, er det samme som at trække det fra:
+ -a = - a
at trække et negativt tal fra, er det samme som at lægge det til:
- -a = + a

plus parenteser
(1) +a + (+b -c) =
(2) +a + +b + -c =
(3) +a + b - c
Ved at sammenligne (1) og (3) ses at når man hæver +-parenteser så ændres der ikke fortegn på tallene i parentesen.

minus parenteser
(1) +a - (+b -c) =
(2) +a - +b - -c =
(3) a - b + c
Ved at sammenligne (1) og (3) ses at når man hæver minus-parenteser, skal man ændre fortegnene på tallene i parentesen.

gange parenteser
(1) a · (+b -c) =
(2) +a · +b +a · -c =
(3) a·b - a·c
Når gange parenteser hæves ganges tallene i parentesen hvert for sig. Lignende ræsonnement kan gøres ved division.

Bevis førelse

For at en formel har almen gyldighed skal der føres logisk bevis for den.

At føre logisk bevis vil sige,, at man med udgangspunkt i kendte regler og ved hjælp af kendte sammenhænge laver logiske følgeslutninger.

For at der kan siges at være ført bevis, skal tre ting være opfyldt:
De enkelte trin i beviset skal være logiske - det vil sige forståelige for ethvert menneske.
Følge-slutningerne skal være reversible: Det vil sige at de også er sande, når de "læses baglæns"
Resultatet skal kunne efterprøves.

Der findes to typer af følgeslutninger, som er vist med eksempler herunder:

(1) $2x = 10 \Leftrightarrow x = 5$
(2) $x = 5 \Rightarrow x > 3$

Følgeslutningen (1) er rigtig, både når den læses fra vestre mod højre og fra højre mod venstre. Dette er vist med dobbelt-pilen (kaldes en bi-implikation)

Følgeslutningen (2) er kun rigtig når den læses fra venstre mod højre. Læst fra højre mod venstre står at hvis $x > 3$ så skulle det føre til at $x = 5$, hvilket ikke er sandt. I følgeslutningen (2) er derfor anvendt en enkelt-pil (kaldet enkelt implikation).

Det er følgeslutninger som (1), der kan bruges i beviser for en formel.

Lidt historie

Selve ideén om at føre et logisk bevis for en sammenhæng har en lang tradition bag sig:

Fra skriftlige kilder ved man, at metoden har været anvendt lige så længe mennesker har skrevet. I vores del af verdenen er det specielt græske og arabiske tænkere, der har udviklet de metoder vi bruger i dag.

Ofte var motivet blot at finde sammenhænge mellem tal fordi det måske kunne lede frem til en forståelse af verdenens orden, men lige så ofte var motivet at kunne udføre beregninger, der skulle bruges til arkitektur eller astronomi.

Når vi i dag ser nogle af de metoder, de anvendte, kan vi blive forbavset over "hvordan fandt de på det!"

Svaret er nok, at de prøvede rigtigt mange forskellige metoder, og vi kender kun dén, som førte frem til det rigtige resultat.

På di næste sider vist to eksempler på logisk bevis. Det ene handler om en ren tal-række og har ingen praktisk betydning og den anden handler om rentesregning.

Eksempler på beviser

Herunder og på siden overfor er eksempler på to forskellige typer af beviser:

I det første eksempel er opgaven at bevise en formel, som man har erfaret ved en række af eksempler. Værdien af dette bevis er, at man derefter kan bruge formlen på alle eksempler – også eksempler, det er praktisk meget vanskeligt at efterregne.

I det andet eksempel er opgaven, at finde en formel, som man ikke umiddelbart kan se. Værdien af dette bevis, er at finde en simplere måde til udregning af en kompliceret sammenhæng.

Eksempel 5

Se talrækkerne herunder:
$1 + 3 = 4 = 2^2$
$1 + 3 + 5 = 9 = 3^3$
$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$
Tilsyneladende gælder det, at en talrække bestående af de første *n* ulige tal har summen:
$S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots\ldots + (2n\text{-}1) = n^2$

For at kunne fastslå, at sammenhængen er gældende for alle tal *n*, er det nødvendigt at føre bevis for dette.

Beviset består i at bevise to sætninger:

(I) Det vises at sammenhængen gælder for tallet 1
(II) Det vises at hvis sammenhængen gælder for et tal a, da gælder den også for a + 1

Til sammen medfører disse to sætninger, at når sammenhængen gælder for tallet 1, gælder den dermed også for 2, dermed også for 3 og så videre.

(I) $S_1 = 1 = 1^2$
Da $1 = 1^2$ er (I) bevist

(II) Sammenhængen antages at gælde for tallet a:
(1) $1 + 3 + 5 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (2a - 1) = a^2$

Og det skal vises at den også gælder for tallet a + 1:
På venstre side af lighedstegnet tilføjes det a+1-led og på højre side indsættes (a + 1) på a´s plads:

(2) $\underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (2a - 1)} + (2(a+1) - 1) = (a + 1)^2$

Ifølge (1) kan summen af de a første led skrives som a^2

$$a^2 + (2(a+1) - 1) = (a + 1)^2$$
$$a^2 + 2a + 1 - 1 = (a + 1)\cdot(a+1)$$
$$a^2 + 2a + 1 = a^2 + 2a + 1$$

(II) er dermed bevist.

Eksempel 6

Annuitetsregning beskæftiger sig med den situation, at man et aftalt andet gange *n* indbetaler en ydelse *y* på en konto, der giver r i rente. Læs eventuelt mere i Penge F+E+D.

Den samlede værdi A_n af indbetalingerne umiddelbart efter indbetaling af den sidste ydelse inklusiv renterne af alle indbetalingerne kan beregnes, som en talrække:

$$(1)\ A_n = \underbrace{y(1+r)^0}_{n.\,-\,\text{indbetaling}} + y(1+r)^1 + y(1+r)^2 + \ldots\ldots + \underbrace{y(1+r)^{n-1}}_{1.\ \text{indbetaling}}$$

Ved hjælp af regneregler for ligninger og regler om reduktion af bogstav-udtryk vil vi omdanne dette ikke endelige udtryk, til et endeligt udtryk.

Først ganges ,der med (1 + r) på begge sider af lighedstegnet og dermed dannes ligningen (2):

$$(2)\ A_n \cdot (1 + r) = [y(1+r)^0 + y(1+r)^1 + y(1+r)^2 + \ldots\ldots + y(1+r)^{n-1}](1 + r)$$

$$(2)\ A_n \cdot (1 + r) = y(1+r)^1 + y(1+r)^2 + y(1+r)^3 + \ldots\ldots + y(1+r)^n$$

Fra ligningen (2) trækkes ligningen (1) og derved dannes (3)

$$\begin{aligned}
(2)\ A_n \cdot (1 + r) &= \phantom{y(1+r)^0 +{}} y(1+r)^1 + y(1+r)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + y(1+r)^n \\
(1)\ A_n &= y(1+r)^0 + y(1+r)^1 + y(1+r)^2 + \ldots\ldots + y(1+r)^{n-1} \\
(3)\ A_n \cdot (1 + r) - A_n &= -y(1+r)^0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + y(1+r)^n
\end{aligned}$$

(3) består af et endeligt antal led og kan reduceres:

$$\begin{aligned}
A_n \cdot (1 + r) - A_n &= -y(1+r)^0 + y(1+r)^n \\
A_n \cdot ((1 + r) - 1)) &= -y + y(1+r)^n \\
A_n \cdot r &= -y + y(1+r)^n \\
A_n \cdot r &= y(1+r)^n - y \\
A_n \cdot r &= y \cdot ((1+r)^n - 1) \\
A_n &= y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}
\end{aligned}$$

Og hermed er der ført logisk bevis for en formel, der kan bruges til at beregne værdien af en opsparing, hvor der indbetales *y*, *n* på hinanden følgende terminer, når renten er *r*.

Definere og udlede

Når man begynder at arbejde med et nyt emne i matematik, er der tradition for at anvende følgende fremgangs måde:

1. Nye begreber og regler *defineres*.
2. Yderligere begreber og regler *udledes* af 1.

Først et lille eksempel, der viser forskellen på at være *defineret* og at være *udledt*.

Eksempel 7

Om at uddrage kvadratroden indenfor de reelle tal.

Definition

Kvadratroden af et tal a er det *positive* tal b for hvilke det gælder at:
$\sqrt{a} = b$ hvis $b^2 = a$

Udledning af en regel

(1) Af definitionen fremgår det at løsningen til $\sqrt{a}$ er b hvor:
$b^2 = a$
(2) For alle reelle tal b gælder at b^2 er et positivt tal eller 0.
(3) a er ikke et negativt tal.
(4) Af (2) og (3) følger, at man kun kan uddrage kvadratroden af positive tal.

Kommentar

Det er altså en *definition*, at kvadratroden af et tal altid er et positivt tal. Dette er gjort fordi regnearten "kvadratrod " i modsætning til alle andre regnearter ellers ville have to løsninger.

At man ikke kan uddrage kvadratroden af et negativt tal er der imod ikke en *definition*: Det kan *udledes* af definitionen.

På de følgende sider er et andet eksempel på *definition* af begreber efterfulgt af *udledning* af regler og nye begreber.

Eksemplet vedrører de trigometriske funktioner sinus og cosinus.

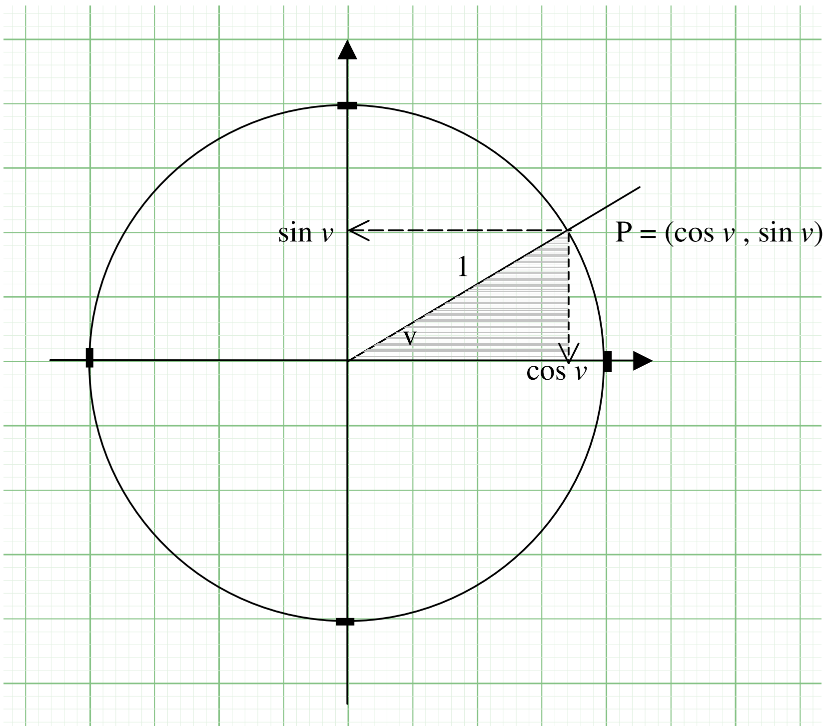
cosinus og sinus

I eksempel 6 *defineres* de to trigometriske funktioner cosinus og sinus. I eksempel 7 – 9 *udledes* formler og det *udledte* begreb tangens.

Eksempel 8

Definition

Cosinus og sinus kan defineres på en tegning i et koordinatsystem af en cirkel med centrum i (0 , 0) og radius 1. Fra (0 , 0) tegnes en halvlinie, der danner en vinkle *v* med x-aksen. Hvor denne linie skærer cirklen er punktet *P*.



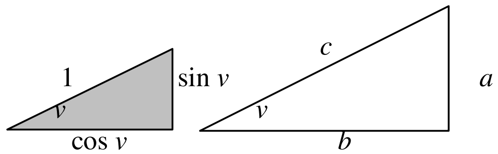
Koordinatsættet til punktet *P* defineres som (cos *v* , sin *v*) svarende til at kateterne i den skraverede retvinklede trekant, har længderne cos *v* og sin *v*.

Eksempel 9

Udledning af formler for retvinklede trekanter

Af definitionen af sinus og cosinus følger, at en ret-vinklet trekant med en vinkel *v* og hypotenusen har længden 1, da har den hosliggende katete længden cos *v* og den modstående katete længden sin *v*.

Givet en anden trekant, der er ensvinklet med ovenstående.



Da trekanterne er ens-vinklede er forholdet mellem deres ensliggende sider ens:

$$\frac{\cos v}{b} = \frac{\sin v}{a} = \frac{1}{c}$$

Dette udtryk kan opdeles:

(1) $\frac{\cos v}{b} = \frac{1}{c}$

(2) $\frac{\sin v}{a} = \frac{1}{c}$

(3) $\frac{\sin v}{a} = \frac{\cos v}{b}$

(1) kan omdannes sådan:

$$\frac{\cos v}{b} = \frac{1}{c} \quad \Leftrightarrow \quad \cos v = \frac{b}{c}$$

(2) kan omdannes sådan:

$$\frac{\sin v}{a} = \frac{1}{c} \quad \Leftrightarrow \quad \sin v = \frac{a}{c}$$

(3) kan omdannes sådan:

$$\frac{\sin v}{a} = \frac{\cos v}{b} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{a}{b}$$

Udtrykket $\frac{\sin v}{\cos v}$ *defineres* som tangens v (se eksempel 7) og dermed er

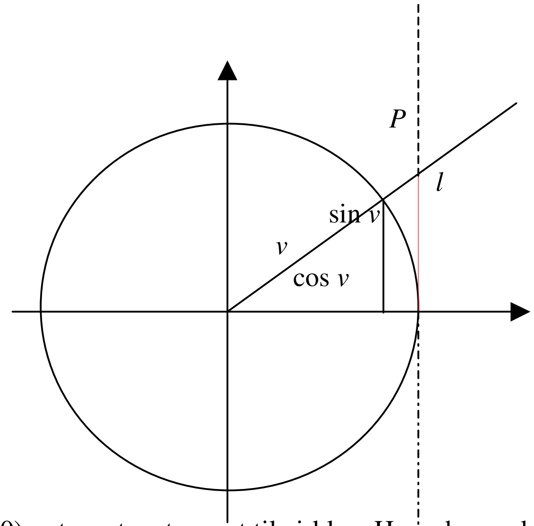
$$\tan v = \frac{a}{b}$$

Læs eventuelt mere i geometri F+E+D om anvendelse af de udledte formler (1), (2) og (3)

Eksempel 10

Udledning vedrørende tan *v*

(1) I enhedscirklen tegnes en ret-vinklet trekant med vinkel *v*. Ifølge definitionen af cosinus og sinus, har trekanten kateter med længden cos *v* og sin *v*



(2) Igennem (1,0) er tegnet en tangent til cirklen. Hvor denne skær forlængelsen af den retvinklede trekants hypotenuse ligger punktet *P*. Længden af liniestykket mellem (1,0) og *P* benævnes *l*.

(3) Derved er dannet en trekant med vinkelspidser i (0,0) (1,0) og punktet *P*. Denne trekant er ensvinklet med den retvinklede tegnet i (1).

(4) Forholdene mellem ensliggende kateter i de to trekanter er ens:

$$\frac{1}{\cos v} = \frac{l}{\sin v}$$ som kan omdannes til:

$$\frac{\sin v}{\cos v} = l$$

(5) Tan *v* er defineret som $\frac{\sin v}{\cos v}$ og længden *l* er således tan *v*

Hermed fik du så også en forklaring på, hvorfor man valgte at kalde denne funktion for tangens.

Model-bygning

Følgende figur bruges ofte til at illustrere, hvad der menes med begrebet modelbygning i matematik.

Virkelighedens verden	Matematikkens verden
1. Problemformulering Beskrivelse af den problemstilling fra virkeligheden, der skal løses.	*2. Almen matematisk model* Blandt kendte matematiske modeller, vælges dén, der synes at passe bedst på problemstillingen.
4. Tolkning og vurdering Resultatet sammenholdes og vurderes i forhold til virkelighedens problemstilling.	*3. Matematisk behandling* Data fra virkeligheden behandles ved brug af den matematiske model.

Det er lettest at forklare figuren med et eksempel. Se eksemplet på næste side.

Eksempel 11

Besparelse i brændselsforbrug til opvarmning ved en forhøjelse af ude-temperaturen i fyringssæsonen.

Problemformulering

Klima-forandringerne vil muligvis medfører at middel-temperaturen i Danmark i fyrings-sæsonnen vil stige med 1,5° i forhold til perioden 1960 – 2000, hvor middel-temperaturen har været 3,3°. Hvad vil det betyde for en husholdning, der normalt bruger 3.500 liter olie til at opvarme deres bolig til 21°?

Almen matematisk model

Ligefrem proportionalitet $y = ax$ vælges, fordi det antages, at jo større opvarmnings-behovet x er(forskel mellem inde- og ude-temperatur), jo større bliver brændselsforbruget y.

Matematisk behandling

Konstanten a findes for perioden 1960 - 2000:

$y = ax$

$3500 = a \cdot (21 - 3{,}3)$

$3500 : 17{,}7 = a$

$a = 197{,}7$

y findes for middel-temperatur på 3,3° + 1,5°

$y = 197{,}7 \cdot (21 - 4{,}8)$

$y = 3202{,}74$

Tolkning

Modellen siger, at familiens olieforbrug vil falde fra 3.500 liter til 3.202,74 liter. På grund af afrundinger i de data, der er anvendt, bør facit afrundes til nærmeste hele 100.

Modellens svar er altså:
Forvendtet forbrug: 3.200 liter olie svarende til en besparelse på 300 liter.

Vurdering

Der er nogle forhold modellen ikke tager højde for. Her er blot nævnt et par:

- Hvordan med blæst? Blæst har også indflydelse på opvarmnings-behovet, men hvordan og hvor meget og vil blæsten også ændre sig med klimaforandringen.
- Og hvad med solskins-timer?

Samlet vurdering

Familien kan regne med at spare ca. 300 liter olie under forudsætning af, at alle andre faktorer, der har indflydelse på deres brændselsforbrug forbliver uændrede.

ISBN: 978-87-92488-36-7