brikkerne til
regning & matematik

statistik og sandsynlighed

F+E+D

preben bernitt

brikkerne
statistik og sandsynlighed F+E+D
1. udgave som E-bog
ISBN: 978-87-92488-20-6

bernitt-matematik.dk
mail@bernitt-matematik.dk
Fjordvej 6
4300 Holbæk

Forord

Hæftet er et af ni, der er udarbejdet til undervisning på VUC på niveauerne F+E+D og dette indeholder *kernestoffet*, som det er beskrevet om statistik undervisnings-vejledningen om trin D og det supplerende stof på trin E.

Dette er en beta-udgave, der er udarbejdet med baggrund i den vejledningen om undervisning på VUC, der udkom i 2009. I forhold til de faglige krav, der viser sig at blive stillet ved de fremtidige skriftlige prøver efter trin D kan der være fag-indhold, der mangler og der kan være fag-indhold, der senere viser sig ikke er være relevant.

bernitt-matematik.dk fralægger sig ethvert ansvar for eventuelle følger af at anvende hæftet.

Siderne i er opdelt således, at først forklares og vises med eksempler og derefter er der opgaver. En del af opgaverne er bearbejdede eksamensopgaver fra HF fra årene 1997 – 2003. Dette er gjort, for at man kan stifte bekendtskab med sprogbrug og dermed lette overgangen til det gymnasiale niveau C.

Fra side 28 er facitliste, hvor man kan se forslag til løsninger.

Ikke grupperede fordelinger

Ofte vil man opstille en tabel, der viser, hvorledes tallene i et talmateriale fordeler sig mellem de forskellige mulige værdier. I forbindelse med tabeller anvendes følgende udtryk:

Hyppighed: antallet af gange en værdi optræder.

Frekvens: hyppigheden som del antallet af værdier i materialet. Frekvensen kan angives som procenttal, decimaltal eller brøk.

Summeret hyppighed: antallet af gange, der optræder værdier, der er mindre end eller lig med en grænseværdi.

Summeret frekvens: den summerede hyppighed som del af antallet af værdier.

Eksempel: Tallene herunder angiver det antal fejl nogle elever lavede ved en prøve.
5 5 2 7 5 6 5 3 8 7 3 6 2 4 5 4 7 6 [illegible]
Opstil en tabel, der viser hyppigheds- og frekvensfordelingen samt de summerede hyppigheder og summerede frekvenser.

Løsning:

antal fejl	0	1	2	3	[illegible]	5	6	7	8
Hyppighed	0	0	2	[illegible]	3	6	3	3	1
Frekvens	0%	0%	10%	[illegible]0%	[illegible]5%	30%	15%	15%	5%
Sum hyp.	0	0	[illegible]	4	7	13	16	19	20
Sum. frek.	0%	[illegible]	10[illegible]	20%	35%	65%	80%	95%	100%

1. En undersøgelse af det [illegible]um nogle personer havde i deres bolig gav følgende resultater:

3 3 2 5 3 6 2 1 8 5 3 4 2 6 4 1 2 3 4 7 6 3

- Lav en hyppigheds- og frekvenstabel, samt en tabel, der viser de summerede hyppigheder og de summerede frekvenser.
- Hvor mange procent havde 4 rum i deres bolig?
- Hvor mange procent havde 2 rum i deres bolig?
- Hvor mange havde 2 rum eller derunder?
- Hvor mange procent havde 3 rum eller derunder?

2. I en avis kunne man læse følgende:

"... 6,5% af de adspurgte havde blot haft én sygedag i det forløbne år, 9,8% havde haft to sygedage og i alt 70,7% havde haft 20 sygedage eller derunder."

- Bestem den summerede frekvens af personer med henholdsvis 2 og 20 sygedage.

3. En gruppe børn blev spurgt om hvor mange gange de havde været i biografen i løbet af deres sommerferie. Svarene fremgår af følgende:

4 3 10 5 3 2 0 0 1 2 0 4 3 0 0 2 6 8 2 9 8 0 1 2

- Lav en tabel, der viser hyppighed og de summerede hyppigheder og frekvenser.
- Hvor mange af børnene havde ikke været i biografen?
- Hvor stor en procentdel af børnene havde været 5 gange eller mindre i biografen?

4. Tabellen viser karakterfordelingen ved [illegible].

Karakter	00	03	5	[illegible]	7	8	9	10	11	13
Elever i %	0	2	[illegible]	10	[illegible]	28	12	17	10	3

- Hvor mange procent af ele[illegible]er[illegible]avde [illegible]et 7 eller derunder?
- Hvad var den summere[illegible]ekven[illegible] karakteren 7?

5. Følgen[illegible]bel v[illegible]en h[illegible]pighedsfordeling:

V[illegible]i	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
Hyp[illegible]hed	8	10	9	12	20	24	10	8	5	2	4

- Hvor man[illegible]al indgik i talmaterialet?
- Find mindsteværdi, størsteværdi og middelværdi
- Lav en tabel, der viser den summerede frekvensfordeling.

6. Følgende tabel viser resultatet af en undersøgelse af, hvor mange ugeblade en række personer havde adgang til i løbet af en uge.

Antal ugeblade:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antal adspurgte:	15	20	11	8	2	6	3	2	0	0	1

- Angiv mindsteværdi, størsteværdi, middelværdi og typetal.
- Lav en tabel, der viser frekvensfordelingen og de summerede frekvenser.
- Hvor stor en procentdel havde adgang til 0 eller 1 ugeblad pr. uge?

Trappediagram

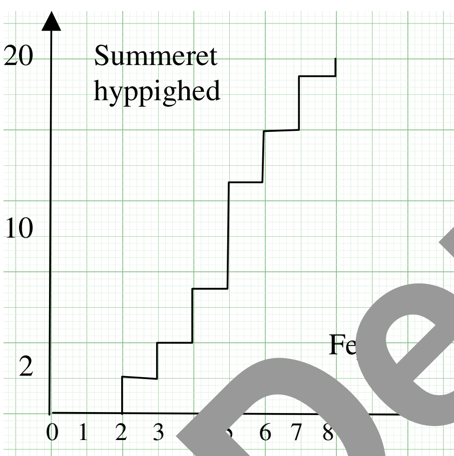
Trappediagrammer anvendes til at vise summerede hyppigheder og summerede frekvenser.

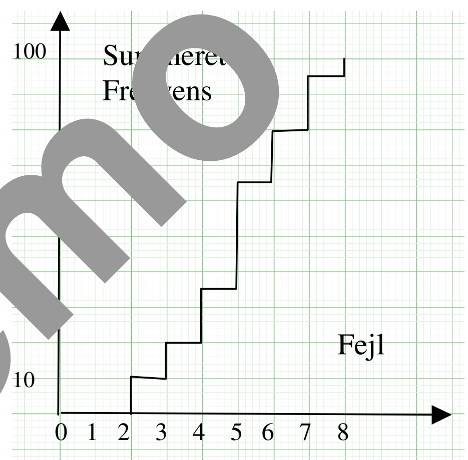
Eksempel: Tabellen viser antallet af fejl, som nogle elever lavede til en prøve:

antal fejl	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Hyppighed	0	0	2	2	3	6	3	3	1
Frekvens	0%	0%	10%	10%	15%	30%	15%	15%	5%
Sum hyp.	0	0	2	4	7	13	16	19	20
Sum. frek.	0%	0%	10%	20%	35%	65%	80%	95%	100%

Vis de summerede hyppigheder og de summerede frekvenser med trappediagrammer.

Løsning:





1. Nogle biler blev undersøgt med hensyn til sikkerheds mæsige fejl.
Antallet af fejl pr. bil fremgår af tallene herunder:

3 0 0 2 4 1 0 0 0 5 2 1 0 0 0 2 0 1 0 4 0 5 3 2 1 0

- Tegn trappediagrammer, der viser de summerede hyppigheder og summerede frekvenser.
- Hvor mange havde 5 fejl eller derunder?
- Hvor mange procent havde over 4 fejl?

Fraktiler

Fraktiler er deskriptorer, der kan aflæses i et trappediagram, der viser den summerede frekvensfordeling.

En fraktil angiver den værdi som den pågældende del af værdierne er mindre ned eller lig med. F.eks. er 25%-fraktilen, den værdi som 25% af tallene er mindre end eller lig med. 25%-fraktilen kaldes også for 1. kvartilen, 50%-fraktilen kaldes medianen og 75%-fraktilen for den 3. kvartil:

1. kvartil (nedre kvartil):
den værdi som 25% af tallene er mindre end eller lig med.
2. kvartil (median):
den værdi som 50% af tallene er mindre end eller lig med.
3. kvartil (øvre kvartil):
den værdi 75% af tallene er mindre end eller lig med.

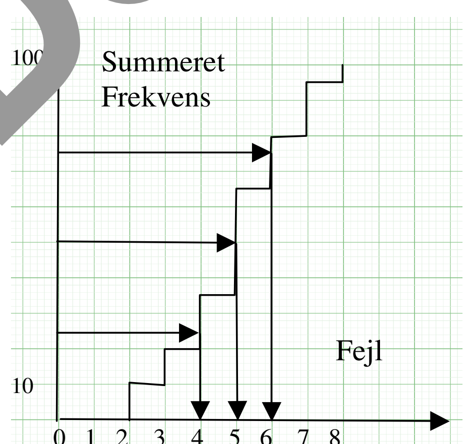
1. kvartil, 2. kvartil og 3. kvartil kaldes tilsammen for kvartilsættet

Eksempel: Tabellen viser antallet af fe[illegible] nogle elever lavede til en prøve:

antal fejl	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Hyppighed	0	0	[illegible]	2	3	6	3	3	1
Frekvens	0%	0%	[illegible]	[illegible]	15%	30%	15%	15%	5%
Sum hyp.	0	[illegible]	[illegible]	4	7	13	16	19	20
Sum. frek.	0%	[illegible]	10%	20%	35%	65%	80%	95%	100%

Vis de[illegible] frekvenser med et trappediagram og aflæs talm[illegible] kvartilsæt.

Løsn[illegible]:



1. kvartil: 25% af eleverne har fået 4 fejl eller derunder
2. kvartil: 50% eleverne har fået 5 fejl eller derunder.
3. kvartil: 75% eleverne har fået 6 fejl eller derunder.

1. Følgende tabel viser resultatet af en undersøgelse af, hvor mange plomberinger en udvalgt gruppe børn havde i deres tænder.

Antal plomberinger:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antal børn:	9	10	4	5	3	0	2	1	0	2	1

- Udregn de summerede frekvenser og tegn et trappediagram.
- Aflæs 40%-fraktilen og 80%-fraktilen.

2. I en avis kunne man læse følgende:

”Den dårligst lønnede fjerdedel af funktionærer ansat indenfor bygge- og anlægssektoren tjente for 10 år siden 21.500 kr. eller derunder."

- Hvilket statistisk begreb er anvendt i artiklen?

3. Deltgaerne i en test blev delt i 2 forsøgsgrupper samt en kontrolgruppe. Hver deltager fik tildelt et antal point fra 0 til 10 afhængig af, hvordan de havde klaret testen. Følgende point blev givet:

Gruppe A				
5	4	6	3	6
2	9	5	4	1
8	5	6	3	4
4	5	6	7	3

Gruppe B				
8	3	0	10	2
2	8	3	4	[illegible]
4	5	2	1	0
9	10	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Kontrolgruppe						
6	5	[illegible]	4	8	3	7
[illegible]	9	3	10	0	4	5
[illegible]	5	7	4	3	2	9
5	6	8	4	6	9	10

- Lav tre tabeller, der [illegible] frekvensfordeling og fordeling af summerede frekvenser for de tre grupper.
- Tegn tre trappediagrammer i samme koordinatsystem.
- Aflæs de tre gruppers kvartilsæt.
- Hvilken af grupperne ligner kontrolgruppen mest?

4. En række personer blev spurgt om, hvor mange gange de havde anvendt offentlige transportmidler indenfor den seneste uge. Svarene fremgår af nedenstående:

0 5 12 4 2 0 0 4 0 0 10 10 10 0 5 0 6 8 0 10 0 3 4
2 0 1 5 4 10 12 8 3 5 8 9 7 3 2 0 1 4 0 9 5 2 9

- Lav en tabel der viser hyppigheds- og frekvensfordelingen samt de summerede frekvenser.
- Tegn et trappediagram og find medianen.
- Forklar hvad medianen viser.

Grupperede fordelinger

Spreder tallene i et talmateriale sig over et meget stort antal forskellige værdier, vil man ofte inddele tallene i grupper (intervaller).

Interval: kan angives som]0 ; 10] eller $0 < x \leq 10$
Læs eventuelt forklaring på side 28.

Interval-hyppighed: antal værdier i det pågældende interval.

frekvens: antal værdier i intervallet som del af det samlede antal.

summeret hyppighed: antal værdier i intervallet og under dette.

summeret frekvens: Summeret hyppighed som del af det samlede antal

Eksempel: På en mindre virksomhed ha[illegible] ansatte følgende lønninger:
20.255 kr 19.875 kr [illegible] kr [illegible] kr 21.432 kr 18.675 kr.
21.467 kr 18.604 kr 21.432 kr [illegible] kr 21.378 kr 19.865 kr.
Inddel lønningerne i grupper med intervallængden 1.000 kr.:
]18.000 ; 19.000]][illegible] ; 20.000] osv.
Opstil en tabel over intervalhyppighed, summeret hyppighed og summerede frekvens.

Løsning:

Løn i [illegible]	]18000;19000]	]19000;20000]	]20000;21000]	]21000;22000]
Hyppighed	2	4	2	4
Summeret hyppighed	2	6	8	12
Summeret frekvens	17%	50%	67%	100%

1. Højdemåling af en gruppe børn gav følgende resultater:

Højde i cm:
152 143 132 145 138 124 165 121 136 132 143 139 123 142 155

- Inddel materialet i intervaller med intervallængden 5 cm:
-]120,125]]125,130) osv.
- Lav en tabel, der viser intervalfrekvenser og summerede intervalfrekvenser.
- Hvor mange procent af børnene var 135 cm eller derunder?
- Hvor mange procent af børnene var over 135 cm?

2. Nogle mennesker blev spurgt om, hvor mange cigaretter de havde røget dagen forinden.
Svarene fremgår af nedenstående liste:

0 0 3 0 20 15 0 40 10 28 18 45 20 10 8 4 6 6 12 0 0 4 0

- Inddel materialet i følgende grupper:
  $x = 0$, $0 < x \leq 10$, $10 < x \leq 20$, $20 < x \leq 30$, $30 < x \leq 40$ og $x > 40$
- Lav en tabel, der viser intervalfrekvenserne og de summerede intervalfrekvenser.
- Hvor mange procent af de adspurgte havde røget 10 cigaretter eller derunder?

3. Inddel følgende tal i intervaller med interval længden 2:

1,2 3,8 2,1 4,6 8,5 9,0 7,4 1,2 3,7 4,5 4,3 6,0 9,1 4,0 0,8

- Lav en tabel, der viser intervalfrekvenserne.

4. En undersøgelse af nogle mejeriers sødmælks produk[illegible]r gav [illegible]gende resultat:

Mejeri nr.	Test	1	2	3	[illegible]	5	[illegible]	7	8	9	10
1530-2		3,5	4,2	3,6	[illegible]	[illegible]	3,6	3,8	3,9	4,0	4,1
2364-1		3,5	3,5	3,5	[illegible]	3,6	3,6	3,6	3,7	3,5	3,6
14560-9		4,2	4,1	[illegible]	3,8	[illegible]	3,8	3,4	3,7	3,6	3,5
23410-3		2,9	3,0	[illegible]	[illegible]	3,4	3,6	3,5	3,4	3,6	3,7

- Opstil en tabel, der viser hvorle[illegible] mejeriernes resultater fordeler sig på intervallerne:]2,5 ; [illegible] 3,[illegible]

5. En stikprøve-undersøg[illegible] biler, der passerede et bestemt sted henholdsvis mellem kl. 8.00 og kl. 9.[illegible]g kl. 12.00 og kl. 13.00 gav følgende resultat om bilernes alder.

Alder i år kl. 8.00 – 9.00						
1	0	2	0	3	1	4
5	10	8	7	3	2	9
5	2	4	8	12	4	15

Alder i år kl. 12.00 – 13.00							
2	10	8	9	13	7	24	10
4	0	1	4	7	9	1	10
4	7	9	4	3	2	6	7

- Lav to tabeller, der viser frekvensfordelingen i følgende intervaller:
- [0 , 2) [2 , 4]]4 , 6]]6 , 8]]8 , 10]]10 , 20]]20 , 30]
- Beskriv kort forskellen på de to undersøgelser.

Søjlediagram og sumkurve

Grupperede fordelinger kan illustreres i søjlediagrammer eller med en sumkurve.

Søjlediagrammer anvendes til at vise intervalhyppighed eller intervalfrekvens.

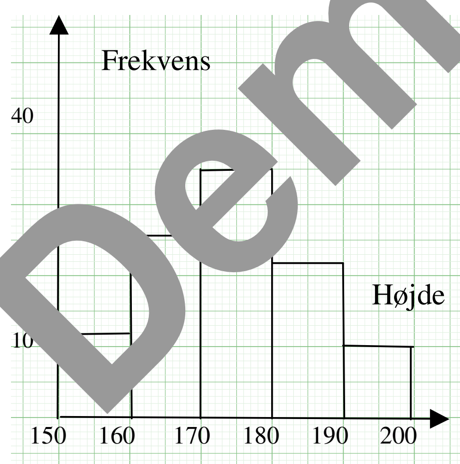
Sumkurve anvendes til at vise summerede intervalfrekvenser. Sumkurver kan bruges til at finde en tilnærmelsesværdi for kvartilsættet.

Eksempel: Nedenstående tabel viser nogle udvalgte personers højde.
Vis tallene med et søjlediagram og en sumkurve.
Find en tilnærmelsesværdi til kvartilsættet.

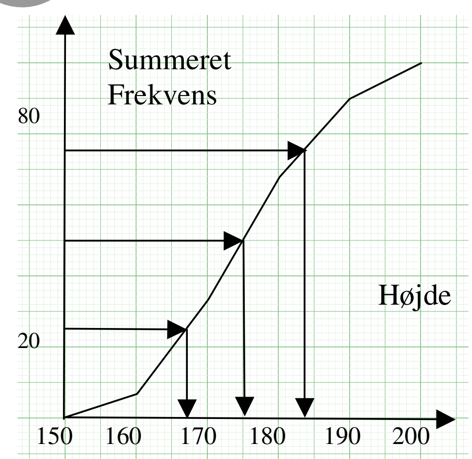
Højde i cm	]150,160]	]160,170]	]170,180]	]180.190]	]190,200]
Frekvens	7%	26%	35%	22%	10%
Summeret frekvens	7%	33%	68%	90%	100%

Løsning:

Søjlediagram



Sumkurve



1. kvartil: 167 cm
Median: 175 cm
3. kvartil: 183 cm

1. I et forsøg deltog 120 personer, der hver opnåede et bestemt antal point:

Point	]10,20]	]20,30]	]30,40]	]40,50]	]50,60]	]60,70]	]70,80]
Personer	10	16	11	12	35	28	8

- Lav en tabel med frekvens og summeret frekvens
- Tegn et søjlediagram og en sumkurve og aflæs kvartilsættet.

2. Ved en forbrugerundersøgelse undersøgte man prisen på sødmælk i en række forskellige butikker.
Resultaterne ses herunder.

Pris for 1 liter sødmælk – øre
485 488 490 455 510 544 485 465 485 485 498 498 528 535
462 468 515 505 498 495 475 514 525 432 460 455 435 515

- Inddel materialet i intervaller med længden 20 ører.
- Udregn frekvenser og summerede frekvenser
- Tegn sumkurve for de summerede frekvenser.
- Hvor mange procent af forretningerne solgte sødmælk for 5[illegible] ører eller derunder?
- Hvad var den højeste pris som de 75% billigste butikker tog for mælken?

3. Ved folkeskolens afgangsprøve i regning opnåede 40 elever følgende pointtal:

Point
35 42 26 37 28 1[illegible] [illegible] [illegible] 4[illegible] [illegible]4 2[illegible] 48 21 25 34 20 12 17 29 40
26 37 46 50 3[illegible] [illegible]7 15 46 [illegible]5 36 24 28 32 20 50 25 46 34 48 19

- Inddel materialet i intervaller startende med 0 og med intervallængden 5.
- Udregn frekvenser og summerede frekvenser.
- Tegn søjlediagram og sumkurve.
- Aflæs 0,2-fraktilen og medianen.
- Angiv hvor mange procent der fik 30 point eller derover.

4. Se talmaterialet herunder:

1 5 4 3 1 0 6 5 7 9 4 3 2 5 6 1 0 2 3 4 5 6 7 4 3

- Bør man lave en grupperet eller ikke grupperet behandling?
- Tegn forskellige diagrammer, der viser fordelingen af tallene
- Find kvartilsættet.

Middelværdiberegning ud fra intervalmidtpunkt

En tilnærmelse til middelværdien af en grupperet fordeling kan beregnes ved at tillægge alle værdierne i et interval en værdi svarende til intervallets midtpunkt.

Eksempel: Tabellen herunder viser aldersfordelingen på en arbejdsplads.

Alder	]15,20]	]20,25]	]25,30]	]30,35}	]35,40]
Antal	5	8	12	14	10

Beregn en middelværdi.

Løsning: Det samlede antal år beregnes ved at gange intervalmidtpunkterne med hyppighederne:

$17{,}5 \cdot 5 + 22{,}5 \cdot 8 + \ldots + 37{,}5 \cdot 10 \quad = \quad 1428$ år

Middelværdi: 1428 år $: 49 \quad = \quad 29$ år

1. En opgørelse af den danske ha[illegible]flådes [illegible]sfordelingen i 1999 så sådan ud:

Alder i år:	[illegible]	5–9	10-14	15-19	20-24	25-29	30-49	50-70
Antal skibe:	458	[illegible]	514	462	308	128	531	352

- Beregn en tilnær[illegible]værdi [illegible] skibenes gennemsnitlige alder.

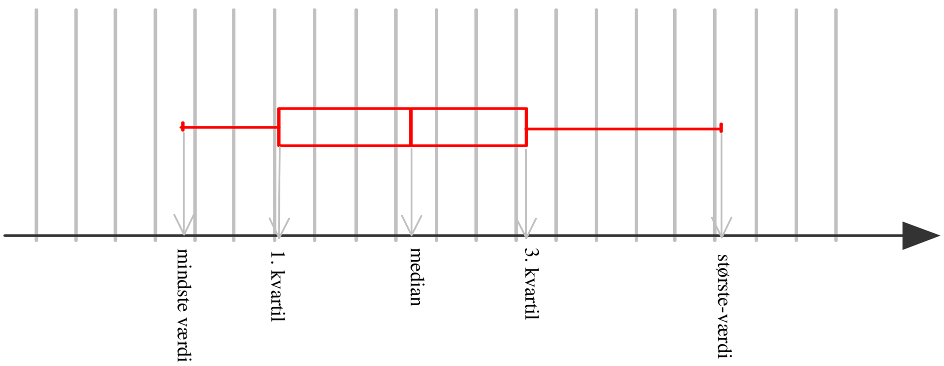
2. Ved [illegible] test af [illegible]le elektriske komponenter kom man frem til følgende fordeling med h[illegible]n ti[illegible]vetid ved normal belastning:

Levetid i timer	]500,600]	]600,700]	]700,800]	]800,900]	]900,1000]
Frekvens	11%	19%	50%	11%	9%

- Beregn en tilnærmelsesværdi for komponenternes middellevetid ved normal belastning.

Boksplot

Et boksplot er en figur, der illustrerer mindste-værdi, kvartilsættet og størsteværdi.



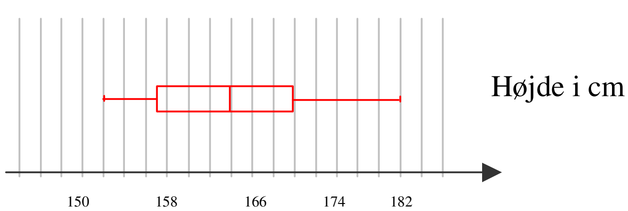
Ideén med et boksplot er, at gøre det tydeligt, hvor de midterste 50% er placeret, vist med selve boksen. Derudover viser den lodrette streg i boksen medianen og de vandrette streger ud fra boksen viser hele datasættes udstrækning fra mindste-værdi til største-værdi. Hvis mindste-værdi eller største-værdi ikke kendt erstattes de vandrette streger af stiblede linier uden ende-streg: ----------

Boksplottet kan tegnes lodret eller vandret. I dette hæfte tegnes boksplot vandret, fordi det passer med, at man kan bruge 1. aksen for sumkurver eller søjlediagrammer som tallinie til boksplottet.

Boksplot bruges til at illustrerer værdier. Det skal ikke bruges til aflæsning. Man kan derfor efter behag tegne på kvadreret eller blankt papir. Der bør dog indtegnes et passende antal hælpelinier mellem tallinien og boksplottet, som vist herover.

Eksempel: Ved måling af nogle personers højde fandt man:
Mindste-værdi: 152 cm
Største-værdi: 182 cm
Kvartil-sæt: (157, 164, 169)
Tegn et boksplot der illustrerer dette.

Løsning:



1. En undersøgelse af priserne på en liter sødmælk gav følgende resultat:

35 butikkers priser på 1 liter økologisk sødmælk
Laveste pris: 7,50 kr.
Højeste pris: 11,95 kr.
Kvartil-sæt: (8,15 kr., 8,95 kr., 9,95 kr.)

- Tegn et boksplot, der illustrerer undersøgelsen.

2. En undersøgelse af transport afstandene for en gruppe VUC-kursister gav følgende resultat:

88 VUC-kursisters afstand fra hjem til VUC i km

]0 ; 5]	]5 ; 10]	]10 ; 15]	]15 ; 20]	]20 ; 25]	]25 ; 30]	]30 ; 50]	over 50
12	22	18	12	8	9	5	2

- Udregn summerede frekvenser, tegn skitse af sumkurve og finde kvartilsættet.
- Tegn boksplot, idet der anvendes stiplede linier for de værdier, der ikke er oplyst.

3. I en avis kunne man læse følgende:

"1.024 interview med tilfældigt udvalgte personer vedrørende det antal timer de tilbragte foran fjernsyn pr. [illegible], viste meget store variationer. Som man kunne vente, var der nogle der aldrig så fjernsyn, mens den længste tid undersøgelsen registrerede var [illegible] timer. Halvdelen så fjernsyn i op til 12 timer, og de 25% mest forbrugende så mere end 20 timer."

- Tegn et boksplot, idet der anvendes stiblede linier for de værdier, der ikke er oplyst.

4. En række personer blev spurgt om hvor langt de havde til arbejde.
Svarene fremgår af tallene herunder:

Afstand mellem hjem og arbejde

6 km	12 km	3 km	35 km	10 km	4 km	6 km	40 km	32 km	0 km
5 km	3 km	16 km	11 km	38 km	1 km	10 km	5 km	11 km	4 km

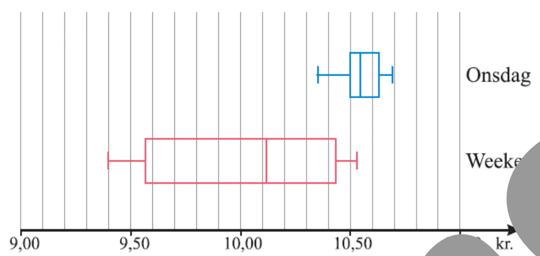
- Tegn et boksplot, der illustrerer undersøgelsen

Sammenligning af boksplot

Har man boksplot for to undersøgelser kan boksplottene bruges til hurtigt at se svarene på spørgsmål som:

- generel forskel i størrelse
- generel forskel i spredning
- forskelle i kvartil-sæt
- forskelle i placering og spredning af de midterste 50% i undersøgelsen

Eksempel: Figuren viser to boksplot over fordelingen af benzinpriser på udvalgte tankstationer i Stor Strøms Amt, dels for onsdag den 5. juli 2006, dels for weekenden den 8. – 9. juli 2006

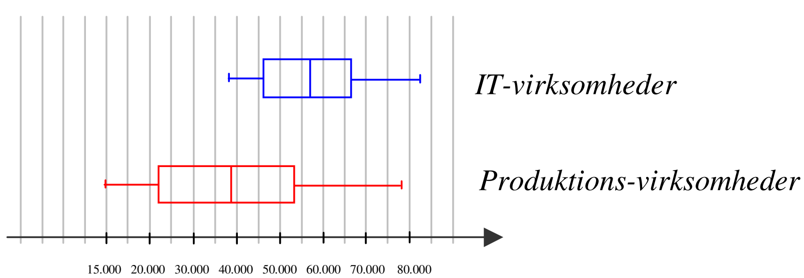


Sammenlign de to boksplot

Løsning: Priserne er generelt højere om onsdagen.
Spredningen er meget større i week-enden.
De midterste 50% har meget større spredning i week-enden.

1. Lønninger for ansatte i nogle IT-virksomheder og nogle produktions-virksomheder kan ses af nedenstående:

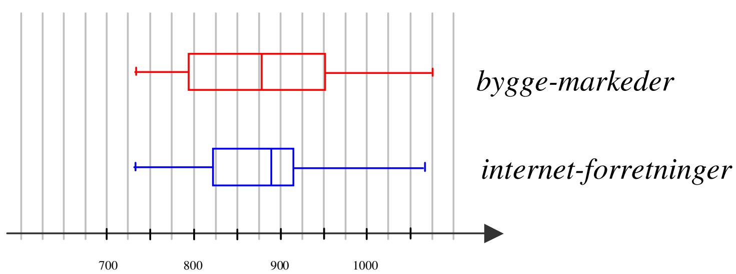
månedsløn i kr. alle ansatte



- Aflæs kvartilsættene.
- Sammenlign de to boksplot.

2. En prisundersøgelse af prisen for bore-maskiner af mærket Bosch Akku Psr 14,4 i henholdvis Internet-forretninger og byggemarkeder gav følgende resultat:

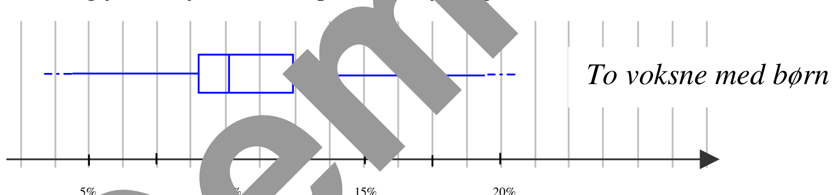
Pris i kr. for Bosch Akku Psr 14,4



- Sammenlign de to boksplot.

3. En forbruger-undersøgelse af, hvor stor en procentdel af husstandenes indkomst efter skat, der blev brugt til fødevarer gav følgende resultat for husstande med to voksne og to børn:

Udgifter til fødevare i procent af disponibel indkomst



Tallene for andre familie-typer fremgår af tabellerne herunder:

udgifter til fødevarer i % af disponibel indkomst

Enlig voksen over 60 uden børn

]0 ; 5%]	]5% ;8%]	]8% ; 10%]	]10% ; 12%]	]12% ; 14%]	]14% - 20%]
12%	8%	20%	35%	18%	7%

Enlig voksen under 60 uden børn

]0 ; 5%]	]5% ;8%]	]8% ; 10%]	]10% ; 12%]	]12% ; 14%]	]14% - 20%]
18%	28%	23%	11%	7%	13%

Enlig voksen med børn

]0 ; 5%]	]5% ;8%]	]8% ; 10%]	]10% ; 12%]	]12% ; 14%]	]14% - 20%]
9%	6%	11%	32%	28%	14%

To voksne uden børn

]0 ; 5%]	]5% ;8%]	]8% ; 10%]	]10% ; 12%]	]12% ; 14%]	]14% - 20%]
13%	7%	34%	26%	12%	8%

- Tegn boksplot og sammenlign.

Indekstal

Indekstal bruges til at vise udviklinger og til at sammenligne udviklinger indenfor områder, hvor talstørrelserne er svære at sammenligne.

Eksempel: Tallene herunder viser indekstallene for den gennemsnitlige timeløn for butiksansatte og prisen for pasning af et barn i daginstitution.

1990 = 100

	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Timeløn	105	108	109	110	112	115
Pris pr. barn:	101	105	110	110	115	120

Hvad er steget mest i forhold til tallene i 1990?
Timelønnen i 1998 var på 98,75 kr., hvad var den i 1995?
I 2001 var timelønnen 105,75 kr. Beregn indekstallet.

Løsning: At 1990 = 100 betyder at indekstallene i tabellen er beregnet ud fra tallene i 1990. I tabellen ses at prisen for pasning er steget til 120, hvor lønnen kun er steget til 115.

Timeløn i 1995: $\frac{98{,}75 \cdot 105}{110} = 94{,}26$ kr.

Indekstal for 2001: $\frac{105{,}75 \cdot 110}{98{,}75} = 118$

1. Tabellen viser udviklingen i antallet af fødsler i en kommune.

Indekstal for børnefødsler (1990 = 100)

1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
97	96	97	[illegible]	[illegible]	102	104

I 2001 var det faktiske antal børnefødsler 328.

- Udregn det faktiske antal børnefødsler for alle årene.

2. Tabellen viser udviklingen i antallet af ledige i en lokal A-kasse.

Antal ledige i % af antal medlemmer pr. 1 august

1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
8,6	7,6	5,3	4,8	6,4	7,0	8,4	10,6	8,7	7,7	7,6

- Lav tabellen om til en tabel med indekstal, hvor ledigheden i 1993 sættes lig med 100.

3. På Københavns fondsbørs udregner man indekstal for de 10 førende aktieselskaber i Danmark.
Indekset kaldes for KFX-indekset.
Den 1. april 2003 var KFX-indekset udregnet til at være 208,75.
Dagen efter var det steget med 1,2 point.

- Hvad var indekset den 2. april 2003?
- Hvor mange procent var stigningen?

4. Udviklingen i forbrugerpriserne følges nøje af Danmarks Statistik.
Tabellen herunder viser udviklingen i gennem år 2002:

Forbrugerprisindeks (Jan. 2000 = 100)
2002

Jan	Feb	Mar	Apr	Maj	Jun	Jul	Aug	Sep	Nov	Dec
108,1	108,7	108,9	109,0	109,2	109,0	109,2	109,8	109,8	110,0	110,3

- I hvilken måned skete den største ændring i indekstallet?
- I hvilken måned skete den største procentvise ændring?

5. Forbrugerprisindekset for Færøerne fremgår af følgende tabel:

År	1983	1987	1996
Prisindeks	[illegible]	112,[illegible]	157,8

En bestemt vare kostede i 19[illegible] 1.250 kr.

- Hvilken pris svarer dette til i 1996?
- Hvor mange procent steg priserne fra 1983 til 1987?
- Hvor mange procent steg priserne fra 1987 til 1996?

6. Tabellen viser indekstal for antallet af sengepladser på danske sygehuse.

År	1980	1985	1990	1995
Indekstal	100	87,8	78,9	73,1

I 1990 var der 25.474 sengepladser.

- Hvor mange sengepladser var der i 1985?
- Sæt indekstallet for 1990 = 100 og omregn indekstallet for de øvrige år ud fra dette.

Beregning af sandsynligheden

Skal man finde sandsynligheden for en hændelse uden at gøre brug af eksperimenter forudsætter det, at man kan skaffe sig et indtryk af, hvordan frekvensfordelingen ville være, hvis man lavede et uendeligt stort antal eksperimenter.

Dette kan gøres ved teoretisk at forestille sig, hvor mange forskellige mulige udfald hændelsen kan have og derefter afgøre, hvor mange af disse der opfylder den givne betingelse. Sandsynligheden for den pågældende hændelse S(h) kan dernæst beregnes ved anvendelse af følgende formel:

S(h): Sandsynligheden for h
p(h): antal muligheder for h
p(u): antal muligheder udfald i alt

$$S(h) = \frac{p(h)}{p(u)}$$

Eksempel: To terninger kastes samtidigt.
Beregn sandsynligheden for at begge terninger viser mere end 4.
Hvor mange gange må man forvente at denne hændelse indtræffer ved 50 kast?

Løsning: Først skrives de mulige udfald

1-1	1-2	1-3	1-4	1-5	1-6
2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6
3-1	[illegible]	[illegible]	3-4	3-5	3-6
[illegible]	4-2	4-2	4-4	4-5	4-6
5-1	5-2	5-2	5-4	**5-5**	**5-6**
6-1	[illegible]	6-2	6-4	**6-5**	**6-6**

I alt er der 36 mulige udfald. Af disse er der fire der opfylder betingelsen om, at begge terninger viser mere end 4.

$$S(>4) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Ved 50 kast må man forvente at den ønskede hændelse indtræffer:

$\frac{50 \cdot 1}{9}$ = ca. 5 gange

1. To mønter kastes samtidigt.

- Skriv en liste med de forskellige mulige udfald.
- Bestem sandsynligheden for at få plat på begge mønter
- Bestem sandsynligheden for, at man får plat på mindst én af mønterne.

2. I en uigennemsigtig pose blev der lagt 25 kugler.
5 af kuglerne var blå, 10 af kuglerne var røde, 2 af kuglerne var sorte og resten var hvide.
En tilfældig kugle blev udtrukket og derefter lagt tilbage igen.
Bestem sandsynlighederne for følgende hændelser:

- den udtrukne kugle var blå.
- den udtrukne kugle var sort eller hvid.
- den udtrukne kugle var blå, rød, sort eller hvid.
- den udtrukne kugle var grøn.
- Hvor mange gange må man forvente at få en rød kugle op, hvis man foretager 25 udtag?
- Hvor mange sorte kugler må man forvente at få op ved 10 udtag?

3. Et elektronisk apparat er indrettet sådan, at det ved tryk på en knap kan vise et tilfældigt valgt tal fra og med 1 til og med 40.
Trykker man igen, vil der på ny vise sig et tilfældigt valgt tal.

- Bestem sandsynligheden for at få et tal, der er deleligt med 4
- Bestem sandsynligheden for at få et tal, der er deleligt med 10.

4. To snurretoppe er lavet sådan, at de kan vise rød, gul eller blå, når de er faldet til ro.
Sandsynlighederne for de tre udfald er lige store.

- Skriv en liste med de forskellige udfald, der er når man lader to toppe snurre og falde til ro samtidigt.
- Bestem sandsynligheden for at den ene af snurretoppene viser rødt.
- Bestem sandsynligheden for at begge snurretoppe viser rødt.

5. Tre personer med navnene A, B og C skal stilles på række

- Skriv en liste med de forskellige muligheder.
- Hvad er sandsynligheden for at A kommer til at stå forrest, hvis rækkefølgen afgøres ved en tilfældig lodtrækning?

Sammensatte hændelser

En hændelse kaldes sammensat, hvis den består af flere hændelser. Når sandsynligheden skal beregnes, udregnes først sandsynlighederne for hver af delhændelserne. Formlerne herunder kan bruges. I formlerne og i sandsynlighedsregning bruges følgende symboler:

a ∨ b: a eller b
a ∧ b: a og b
¬a: ikke a (non a)

S(a), S(b)... Sandsynligheden for a, b osv... S(a v b v ..) Sandsynligheden for a eller b eller ... S(a v b v ..) = S(a) + S(b) + ...	S(a), S(b)... Sandsynligheden for a, b osv... S(a ∧ b ∧ ..) Sandsynligheden for a og b og ... S(a ∧ b ∧ ..) = S(a) · S(b) · ....

Eksempel: To terninger kastes.
Den ene kan vise tallene fra 1 til 6.
Den anden kan vise bogstaverne fra a til f.
Hvad er sandsynligheden for at den ene viser 6 og den anden a?
Hvad er sandsynligheden for at den ene viser 6 eller den anden a?

Løsning: $S(6) = \frac{1}{6}$ og $S(a) = \frac{1}{6}$

$S(6 \wedge a) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{36}}}$

$S(6 \vee a) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \underline{\underline{\frac{2}{6}}}$

1. I tre uigennemsigtige poser var der blevet lagt forskelligt farvede kugler, der havde samme størrelse.

I den første var der 5 gule, 4 blå og 6 røde.
I den anden var der 1 gul, 2 blå og 2 røde.
I den tredje var der 2 gule, 1 blå og 12 røde.
Der blev taget én kugle op af hver pose.
Bestem sandsynlighederne for følgende hændelser:

- Mindst én af kuglerne var gule.
- Alle tre kugler var gule.
- Ingen af de tre kugler var røde.
- Alle tre kugler var enten gule, røde eller blå.
- Hvorfor er det væsentligt at poserne var uigennemsigtige og at kuglerne har samme størrelse?

2. To hændelser kaldes A og B.
Hændelsen A kunne have udfaldene 0 og 1 og hændelsen B kunne have udfaldene 0, 1, 2 og 3.
Bestem sandsynlighederne for:

- $S(A = 1 \lor B = 1)$
- $S(A = 1 \land B = 1)$
- $S(A = 0 \land B = 3)$
- $S(A = 3 \land B = 3)$

3. En cykellås bestod af 6 taster, der hver kunne stå i tre positioner.
Kun når alle 6 taster stod i de rigtige positioner kunne låsen åbnes.

- Hvad er sandsynligheden for, at man ved en tilfældig indstilling af tasterne netop rammer den indstilling, der gør det muligt at åbne låsen?
- Hvad ville sandsynligheden blive, hvis man udvidede antallet af taster til 7?

4. V-6 spil er spil på resultaterne af hestevæddeløb. En V-6 kupon består af 6 løb, hver med 12 felter.
Ved afkrydsning af et felt spiller man på at en bestemt hest vinder det pågældende løb.
Man må gerne krydse flere felter i hvert løb – og betale for det.
Beregn sandsynlighederne for:

- at ramme den rigtige hest i det første løb ved blot at sætte et kryds.
- at ramme de rigtige heste i alle 6 løb ved blot at sætte et kryds ved hvert løb.
- at ramme den rigtige hest i et løb ved at sætte to krydser ud for løbet.
- at ramme de rigtige heste i alle løb ved at sætte to krydser udfor hvert løb.

5. Et lykkehjul var udstyret med 100 felter forsynet med tal og farver.
Der var 4 felter med hvert af tallene fra 1 til og med 25 og felterne var farvet sådan, at der var 3 hvide og et sort pr. tal.
Det felt som lykkehjulet stoppede ved gav gevinst og der blev udbetalt præmie til den spiller, der havde spillet på det tal, der stod på feltet.
1. præmie: sort felt giver 20 kr.
2. præmie: hvidt felt giver 10 kr.

Det koster 2 kr. at spille på et tal.

- Hvad er sandsynligheden for at få 1. præmie, hvis man spiller på ét tal
- Hvad er sandsynligheden for at få 2. præmie, hvis man spiller på ét tal.
- Beregn den samlede udgift og den samlede sandsynlige præmie ved at spille på ét tal i 50 spil efter hinanden.

Kombination af mere end to hændelser

Når der skal kombineres mere end to hændelser kan følgende formel bruges:

Antal kombinations muligheder: K
Antal muligheder for hændelse a: p(a)
Antal muligheder for hændelse b: p(b)
Antal muligheder for hændelse c: p(c)

$K = p(a) \cdot p(b) \cdot p(c) \cdot \ ....$

Eksempel: Blandt 12 personer skal vælges en tillidsmand, en 1. suppleant og en 2. suppleant.
Hvor mange forskellige muligheder er der?

Løsning: At vælge de tre personer kan opfattes som en kombination af tre hændelser: Valg af tillidsmand, valg af 1. suppleant og valg af 2.

1. Et bord, en stol og en seng skulle males i farverne rø[illegible]ller b[illegible]

- Hvor mange kombinationsmuligheder er der?

2. En restaurant tilbød følgende retter til [illegible]ens [illegible]u:
Forret: skaldyrssalat, suppe, ét stykke m[illegible]laks.
Hovedret: dyreryg, oksesteg og l[illegible]eda[illegible].
Efterret: isanretning, frugtanret[illegible]ng e[illegible]er diverse kager.

- Hvor mange muligh[illegible]der [illegible]vælg[illegible] mellem?

3. Til en borddekoration[illegible]vde [illegible]an valget mellem tre forskellige duge, fem forskellige slags service [illegible] forskellige blomsterdekorationer.

- Hvor mange valgmuligheder havde man i alt?

4. På en tipskupon er der 13 kampe med tre valgmuligheder ved hver kamp.

- Hvor mange forskellige kombinationsmuligheder er der?

5. Fem personer skal stilles på række.

- Hvor mange måder kan dette gøres på?

6. En pige havde valget mellem at tage bukser, shorts eller kjole på.
Hun havde bukser i farverne rød, pink, hvid, shorts i farverne orange, gul og blå og kjoler havde hun i farverne orange, gul og lilla.

- Hvor mange valgmuligheder havde hun?

7. En kodebetegnelse bestod af to bogstaver og to tal.
F.eks. kunne AE67 være et sådant kodenavn.
På de to første pladser skulle der stå et af bogstaverne A, B, C D eller E
På de to sidste pladser skulle, der stå tal fra og med 0 til og med 9.
Bogstaver og tal måtte gerne anvendes to gange i det samme kodenavn.

- Hvor mange forskellige kodenavne kan man lave?

8. Fire personer skal placeres omkring et rundt bord.

- Hvor mange måder kan dette gøres på?

9. En låsesmed havde et låsesystem, hvo[illegible] der h[illegible]e en nøgle, der havde fem tapper. Hver af tapperne kunne [illegible] ko[illegible] [illegible]ange.

- Hvor mange forskellige n[illegible] [illegible]unne [illegible]smeden lave?
- Hvor stor en sandsynlig[illegible] en fo[illegible] man med en tilfældigt valgt nøgle kan låse en tilfældigt valgt lås op?

10. I et l[illegible] der [illegible]rett[illegible] fem lampepladser.
De[illegible]kulle op[illegible]ges [illegible] forskellige lamper.

- På h[illegible] mange [illegible]rskellige måder kan dette gøres?

11. En PIN-kode til Dankort består af fire cifre.
Til hvert af cifrene er der frit valg mellem tallene 0 til og med 9.
En PIN-kode må dog ikke bestå af fire ens cifre.

- Hvor mange forskellige PIN-koder findes der.

12. Et betalingskort havde et kortnr. med 12 cifre.
Derudover var det forsynet med nummeret på måned og årstal for udløb.
Endelig var der en fire cifret kontrolkode.
Alle tal kan bruges til kortnr. og kontrolkode.
Udløbmåneden kan være 1 til 12 og året 04, 05 eller 06.

- Hvor mange forskellige kort kan man lave?

Udtagelse af stikprøver

Lotto er et eksempel på det der i kombinatorik kaldes for udtagelse af stikprøver:
Ud af 36 tal skal udtages 7 tal. Rækkefølgen tallene udtages i, er ligegyldig idet alle der har udvalgt de rigtige 7 tal får gevinst.
Man kalder denne type stikprøver for en uordnet stikprøve uden tilbagelægning.

Formlen herunder kan anvendes til at finde antallet af stikprøver i denne situation:

Antal elementer i datasættet: n
Antal elementer i stikprøven: p
Antal forskellige stikprøver: K(n,p)

$$K(n,p) = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots}^{p\text{ - 1 faktorer}}}{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot \ldots \cdot 1}$$

Eksempel: I lotto er der 36 tal, hvoraf 7 skal gættes rigtigt for at få 1. præmie.
Hvor mange muligheder er der får at vælge 7 tal blandt de 36?

Løsning: Antal elementer:
n = 36
Antal udtagne:
p = 7
Kombinationsmuligheder:

$$K(n,p) = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots}^{p\text{ - 1 faktorer}}}{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot \ldots \cdot 1}$$

$$K(40,7) = \frac{\overbrace{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31}^{6\text{ faktorer}}}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \underline{\underline{278.256\text{ muligheder}}}$$

1. I et lotteri skal man vælge 4 numre ud af 20 mulige.

- Hvor mange mulige måder kan dette gøres på?

2. I lotto skulle man tidligere gætte 7 rigtige ud af 32 mulige for at få gevinst.
Man satte så antallet af numre op fra 32 til 36.

- Hvor mange mulige måder var der når man skulle gætte 7 ud af 32?
- Hvor mange gange flere muligheder blev der da man satte det op?

3. I et lotteri var der 10 tal, hvoraf 3 blev udtrukket.
Der blev fremstillet lotterisedler med alle de mulige vinder-kombinationer.

- Hvor mange lotterisedler skulle der laves?

4. I et bankospil blev der trukket lod mellem 49 numre.
For at få gevinst skulle man have 5 numre rigtigt.

- På hvor mange måder kan man udtrække 5 numre af 49?

5. I et lotteri var der 25 numre, hvoraf to blev udtrukket og vinderne var de der havde gættet de to tal rigtigt.
I et andet lotteri var der kun 20 numre, men her blev tre udtrukket og alle tre skulle være gættet rigtigt for at få gevinst.

- I hvilket af lotterierne var det sværest at få præmie?

6. Blandt 13 drenge skulle der ved lodtrækning udtages to reserver.

- På hvor mange måder kunne dette gøres?

7. Ud af en mængde på 30 elementer udtog man en stikprøve på 2.
Af de 30 elementer var der 10 ønskede udfald og 20 uønskede udfald.

- På hvor mange måder kan man udtage 2 af 30?
- På hvor mange måder kan man udtage 2 af 10?
- Hvad er sandsynligheden for at de 2 udtagne er blandt de 10 ønskede.

8. I et stort kontorlokale var der indrettet plads til opslagstavler, der skulle bruges til vigtige meddelelser til samtlige ansatte på kontoret.
I alt var der afsat plads 30 steder.
Der var enighed om kun at opsætte 5 tavler.

- Hvor mange måder kunne dette gøres på?

9. Ud af et spil kort med 52 kort skulle trækkes fire kort.
13 af kortene var hjerter.

- Hvor mange muligheder er der for at trække de fire kort?
- Hvor mange muligheder er der for at alle de fire kort er hjerter?
- Hvad er sandsynligheden for at alle fire kort er hjerter?