brikkerne til
regning & matematik

tal og algebra

F+E+D

preben bernitt

-

brikkerne….
Tal og algebra E+D
2. udgave som E-bog
ISBN: 978-87-92488-35-0

bernitt-matematik.dk
mail@bernitt-matematik.dk
Fjordvej 6
4300 Holbæk

Forord

Hæftet er et af ni, der er udabejdet til undervisning på VUC på niveauerne F+E+D og dette indeholder *kernestoffet*, som det er beskrevet om tal og algebra i undervisnings-vejledningen om trinnene E+D. Hæfterne er opbygget således at udover at indøve kernestoffet vil man også få styrket de matematiske *kompetencer* :

I dette hæfte arbejdes der specielt med *bevisførelse*, idet opgaverne lægger op til overvejelser om dette. Endelig er der i appendixet på side 18 en gennemgang begrundelse for og metoder til bevisførelse.

Dette er en *beta-udgave*, der er udarbejdet med baggrund i den vejledning om undervisning på VUC, der udkom i 2009. I forhold til de faglige krav, der viser sig at blive stillet ved de fremtidige skriftlige prøver efter trin D kan der være fag-indhold, der mangler og der kan være fag-indhold, der senere viser sig ikke er være relevant. bernitt-matematik.dk fralægger sig ethvert ansvar for eventuelle følger af at anvende hæftet.

Hæftet omhandler følgende emner men gennemgås i en lidt anden rækkefølge end vejledningen lægger op til:

Rationelle tal (fra side 6)
Irrationelle tal (fra side 8)
Talfølger og talrækker (fra side 11)

I indledningen til hvert af emnerne gennemgås fagudtryk, der er kendt fra tidligere og som anvendes i forklaringerne i dette hæfte.

Siderne i hvert kapitel er opdelt således, at først forklares og vises med eksempler og derefter er der opgaver. En stor del af opgaverne er bearbejdede eksamensopgaver fra HF fra årene 1997 – 2003. Dette er gjort, for at man kan stifte bekendtskab med sprogbrugen og dermed lette overgangen til det gymnasiale niveau C.

En del af opgaverne kræver brug af en lommeregner med tasterne:
x^y og $\sqrt[y]{x}$ eller med tasten: ∧
I brugervejledningen til lommeregneren står, hvordan man anvender disse taster til løsning af de konkredte opgaver.

Fra side 21 er facitliste, hvor man kan se forslag til løsninger.

Rationelle og irrationelle tal

Talmængder

Talmængder er betegnelse for en gruppe af tal, der lever op til en betingelse.

Du skal kende følgende tal-mængder og deres betegnelser:

Naturlige tal:

$N \; = \{1 , 2 , 3 , ...\}$
$N_0 = \{0 , 1 , 2 , 3 ......\}$

Hele tal:

$Z = \{..., -3, -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 ....)$

Rationelle tal:

Alle tal, der kan skrives som brøk:

$\frac{p}{q}$ hvor p er et helt tal og q et naturligt tal.

Rationelle tal kan også skrives som decimal-tal med et endeligt antal decimaler eller hvor decimal-tallet er periodisk. Dette forklares nærmere på næste side.

Irrationelle tal

er tal der ikke kan skrives som decimal-tal med et endeligt antal decimaler eller hvor decimal-brøden ikke er periodisk.

$\sqrt{2}$ og tallet ∏ er eksempler på irrationelle tal.

Reelle tal

er samlingen af de rationelle tal og de irrationelle tal

Primtal

er hel-tal, der kun kan deles uden rest med 1 og tallet selv. Følgende er de første ti primtal:

2 , 3 , 5 , 7 ,11 , 13 ,17 , 19 , 23 , 29

primfaktor opløsning

at opløse en brøks tæller og nævner i primfaktorer, er en metode til at afgøre om brøken kan forkortes:

Eksempel: $\frac{12}{15} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5}$

Da 3 optræder i både tælleren og nævneren kan brøken forkortes med 3.

På de følgende sider lærer du at skelne mellem rationelle og irrationelle tal og du lærer nogle regnemetoder, som kan bruges til at sammenregne irrationelle tal.

Rationelle tal

Hele tal og brøktal er rationelle tal.

Brøker kan omregnes til decimal-tal, der kan skrives som *endelige* eller *periodiske* decimal-tal.

endeligt decimal-tal kommer f.eks. ud af brøken: $\frac{3}{8}$

$\frac{3}{8} = 3 : 8 = 0{,}375$

Endeligt decimal-tal fremkommer når nævneren er et tal, der har et tal, der ender på 0 i sin "lille tabel" fra 1 til 9. F. eks. 8, der har 40 i sin tabel.

periodiske decimal-tal kommer ud af alle brøker, hvor divisionsstykket ikke går op.

$\frac{11}{7} = 11 : 7 = 1{,}57142857142857142857...$

Perioden: 142857 går igen et uendeligt antal gange.

En periodisk decimal-brøk kan skrives således: 1[illegible]142[illegible]

Stregen over perioden, angiver at denne gentag[illegible] et [illegible]deligt antal gange.

At skrive $1{,}57\overline{142857}$ er altså en måde [illegible]rive [illegible]t uden at forkorte det.

At alle divisionsstykker, der ikke [illegible]iver [illegible]riodiske decimaltal, skyldes selve naturen i division:

- når man dividerer [illegible] re[illegible]
- der er kun er et [illegible]grænset [illegible]al [illegible]ellige rester (ved divison med 7 er der kun tallene 1, 2, 3, [illegible]og 6, der [illegible]n blive rester).
- Når en rest foreko[illegible]er for [illegible]den gang i divionsstykket begynder en ny periode, fordi de følgende div[illegible], vil følge mønsteret fra sidst denne rest forekom.

Det kan vises, at alle periodiske decimal-tal kan skrives som brøker.
Se opgave 4 overfor, om hvordan man gør.

Eksempel: Divider 235 med 11.
Facit skal angives som uforkortet decimal-tal.

Løsning: Da 11 ikke har et tal, der ender med 0 i sin "lille tabel" fra 1 til 9 vil facit blive et periodisk decimal-tal. Divisionen udføres indtil perioden er fundet.

$235 : 11 = 21{,}\overline{36}$

1. Om endelige decimaltal

- Skriv en liste med de tal, mindre end eller lig med 20, der giver endelige decimaltal ved division.
- Find fælles-træk ved disse tal.

2. Udfør division på papir og angiv facit som uafrundet decimal tal

- 13 : 3
- 213 : 7
- 0,08 : 0,3

3. Omdan følgende brøker til uafrundet decimaltal:

- $2\frac{3}{8}$
- $3\frac{2}{11}$

4. Følgende udtryk kan bruges til at omdanne et periodisk decimaltal til en brøk

$$\frac{a}{1-q}$$

hvor *a* er den første periode og *q* er forholdet mellem perioderne.

F. eks. kan $0,\overline{12}\,12\ldots$ omdannes til

$$\frac{0{,}12}{1-1/100} = \frac{0{,}12}{0{,}99} = \frac{0{,}12\cdot 100}{0{,}99\cdot 100} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$$

- Omdan $0,\overline{3}$ til uforkortelig brøk.
- Omdan $0,\overline{125}$ til uforkortelig brøk og vis derefter at omsætningen er korrekt.

Givet følgende periodiske decimal-tal, der skal omsættes til brøk:

$2{,}5\overline{4}$

udtrykket: $\frac{a}{1-q}$

er kun en gyldig omskrivning af den periodiske del. En omsætning af hele tallet bliver derfor:

$$2 + \frac{5}{10} + \frac{0{,}34}{1-1/10}$$

- Omdan $2{,}1\overline{3}$ til uforkortelig brøk.
- Omdan $0{,}0\overline{125}$ til uforkortelig brøk.

Irrationelle tal

Irrationelle tal, er tal, der ikke kan skrives som brøker og dermed heller ikke som endelige eller periodiske decimal-tal. $\sqrt[2]{5}$ er et eksempel på et irrationelt tal, hvilket vises herunder med et såkaldt *mod-eksempel*:
man viser, at det modsatte ikke er rigtigt – altså i dette tilfælde, at det ikke er rigtigt, at der findes en brøk der er løsning til $\sqrt[2]{5}$

Antag at der er et rationelt tal som kan skrives som uforkortelig brøk:

(1) $\sqrt[2]{5} = \frac{p}{q}$

Dette kan omskrives til:

(2) $5 = \frac{p^2}{q^2}$

Brøken var antaget til at være uforkortelig og dermed:

- p og q´s primfaktoropløsning indeholder ikke nogen fælles primtal
- både p^2 og q^2 må have et lige antal primtal (har p [illegible] primfaktorer må p^2 have seks).

Og her opstår modstriden:
Ligningen (2) siger at p^2 har én primfaktor – [illegible] tal [illegible] mere end q^2, hvilket ikke kan passe da de begge har et lige ant[illegible]imfa[illegible]er.

1. Opløs følgende i primfaktore[illegible]

- 250 1225

2. Opløs følgende [illegible] i prim-f[illegible]orer:

- 30 og 30^2
- 40 og 40^2
- Lav en regne-reglen om at finde primfaktorerne for a^2, når primfaktorerne for a er kendt.

3. Undersøg påstanden:
"Hvis primfaktoropløsningen af et tal a indeholder et lige antal af hvert primtal, der indgår i opløsningen, da bliver kvadratroden af a et rationelt tal."

4. Afgør om følgende er rationelle eller irrationelle tal:

- $\sqrt[2]{128}$ $\sqrt{81}$ $\sqrt{0}$

Da man ikke kan skrive irationelle tal som brøker eller endelige decimal-tal kan man ikke sammenregne dem, uden at begå en afrundingsfejl.

Man kan i visse situationer kommer om ved dette problem ved at bruge regneregler for reduktion:

Eksempel: Reducer:
$2\cdot\sqrt{5} + 3\cdot\sqrt{5}$

Løsning: $2\cdot\sqrt{5} + 3\cdot\sqrt{5} = (2 + 3)\cdot\sqrt{5} = 5\cdot\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$

5. Afgør om hvert udsagn, om det er sandt ellr falsk?

- $2\sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$
- $\sqrt{5} + \sqrt{3} = \sqrt{8}$
- $\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{15}$
- $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} = 4$

6. Det antages at følgende sammenhæng mellem s, p og q er gældende:

$$s = \sqrt{\frac{p}{q}} - \frac{p}{q}$$

Udtryk på korteste form

- s som funktion af q når $p = 4$
- s som funktion af p når $q = 5$

7. Undersøg påstanden:
"Det facit, man skriver, vil altid være forbundet med større unøjagtighed, når man arbejder med irrationelle tal, end når man arbejder med rationelle tal!"

8. Undersøg påstandene:

- $\frac{5}{0}$ er et irrationelt tal
- $\sqrt{-5}$ er et irrationelt tal.

Tal-følger og tal-rækker

En **talfølge** er en uendelig række af tal, der står i en bestemt række-*følge.*

3-tabellen er et eksempel på en tal-følge:
3 , 6 , 9 , 12 , …………………

En **talrække** er summen af en af tal, hvor der er et bestemt forhold mellem tallene.

3 + 6 + 9 + 12 + ………………….

er et eksempel på en talrække, her den tal-række, der kan dannes af tal-følgen: 3-tabellen.

Arbejde med tal-følger og tal-rækker har beskæftiget matematikere til alle tider:

Dels som en intellektuel udfordring og dels til løsning af praktiske problemer. F. eks. er opsparingsformlen:

$$A_n \quad = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

resultatet af at arbejde med en talrække.

På de følgende sider introduceres skriveformer, der bruges i forbindelse med tal-følger og talrækker, og der vil blive arbejdet med forskellige talfølger og talrækker.

Arbejdet med opgaverne kan afsluttes af med arbejde med **Apendix** på side 19.

Dér bliver givet eksempel på bevis-førelse i forbindelse med tal-rækken af ulige tal samt eksempel på praktisk anvendelse af tal-rækker (annuiteter).

Tal-følger

3-tabellen er et eksempel på en tal-følge og man kan bruge skrivemåderne herunder til at beskrive 3-tabellen som en tal-følge:

på listeform eller: som formel

a_n: 3 , 6 , 9 , 12 ……a_n , … $a_n = 3 \cdot n$

Tallene 3 , 6 , 9 kaldes for tal-følgens elementer

Udtrykket: $\mathbf{a_n}$**:** læses som ”det n-te element i tal-følgen a” og f. eks. betyder a_3: ”det tredje element i tal-følgen a.

Bogstaverne a og n kan være erstattet af andre bogstaver som f. eks. x og y.

Eksempel Givet to talfølger *a* og *b*, for hvilke det gælder:

a_n: 1 , 4 , 9 , 16 , …………, a_n , …..

b_n: 2 , 4 , 6 , 8 , ……… …, b_n , ...

Skriv formler for talfølgerne a og b

For hvilken værdi af n er $b_n = a_6$

Løsning Tal-følgen a består af kvadrat tallen[illegible] fra [illegible]ed [illegible]

$a_n = n^2$

Tal-følgen b er 2-tabellen fra [illegible]ed 2:

$b_n = 2 \cdot n$

$a_6 = 6^2 = 36$

$b_n = 2 \cdot n = 36 \Leftrightarrow$ [illegible] = 1[illegible]

1. Givet talfølgen a_n:

a_n : 1 , 3 , 6 , 10 , ...[illegible]$_n$, ...

- Find a_5, a_6 og a_{20}
- Beskriv sammenhængen mellem tallene i talfølgen a_n.
- Har talfølgen en mindste-værdi og en største-værdi?

2. Givet talfølgen y_n:

y_n : 120 , 240 , 60 , 120 , 30 , 60 , ..., y_n, ...

- Find y_7 og y_9
- Har talfølgen en mindste-værdi og en største-værdi?

3. Givet talfølgen a_n, for hvilken det gælder at:

$$a_n = \frac{n-1}{2}$$

- Skriv tal-følgen a_n på listeform.

Tal-følgen b_n er givet ved:
$b_n = 2(n - 1)$

- Gør rede for, hvor mange elementer a_n og b_n har tilfælles.

4. Givet a_n:

$$a_n = \frac{2}{20-n}$$

- Angiv a_2 og a_{10}
- Kan a_n udgøre en talfølge?

5. Ud af en gruppe med *n* drenge og *n* piger skal dannes *n* par bestående af en dreng og en pige.
Talfølgen p_n angiver antallet af forskellige par, der kan dannes.

- Udfyld et skema, som vist herunder:

n	1	2	3	4	5
p_n					

- Skriv p_n som formel.

6. Talfølgen l_p angiver antallet af linier *l*, der kan trækkes mellem *p* punkter beliggende på en cirkelbue.

- Tegn skitser og udfyld et skema, som vist herunder:

p	1	2	3	4	5
l					

- Skriv l_p som formel.

7. Ved hjælp af én 50 øre, én 1-krone og én 5-krone kan dannes følgende beløb:
0,50 kr. , 1 kr. , 5 kr. 1,50 kr. , 5,50 kr. , 6 kr. , 6,50 kr.

- Angiv, hvor mange beløb, der kan dannes, hvis der tilføjes en 10-kr.
- Hvor mange beløb kan dannes, hvis der i alt er 6 forskellige mønter?

Tal-rækker

Af tal-følger kan laves tal-rækker, der er summen af tal-følgens tal:
Af tal-følgen: 3-tabellen kan laves en tal-række, hvor elementerne fra talfølgen står som led i samme rækkefølge som i tal-følgen:

$S_n = 3 + 6 + 9 + 12 \text{ ……..} + 3 \cdot n$
ligesom tal-følgen var uendelig er talrækken det også. Hvis det er muligt, at angive en formel for størrelsen af et tilfældigt led - n - skrives denne formel til sidst i tal-rækken.

Da der almindeligvis ikke findes et svar på, hvad summen af et uendeligt antal tal er, er opgaven ofte, at finde summen af et bestemt antal led.

$S_5 = 3 + 6 + 9 + 12 + 15 = 45$

Eksempel 1 Givet talfølgen *a*, der består af de ulige tal fra og med 0 og givet tal-rækken S_n , der er dannet af a.
Skriv tal-rækken S_n
Find S_1, S_2 , S_3 og S_4

Løsning $S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \text{……..} + (\ n-1)$
$S_1 = 1$
$S_2 = 1 + 3 = 4$
$S_3 = 1 + 3 + 5 = 9$
$S_4 = 1 + 3 + 5 +$

1. Givet tal-følgen *a* … af de naturlige tal og tal-rækken S_n, der består af elementerne fra *a*.
- Skriv S_n på listeform.
- Find S_1 , S_5 og S_{15}.

2. Givet talrækken *S*.
$S_n = 3 + 5 + 8 + \text{..................}$

- Find S_5
- Angiv størrelsen af det n-te led.

3. Givet talrækken S

$S_n = 9 + 8 + 7 + ...+ (10 – n)$

- Beregn S_{11}.
- Vis at for n = -19 er $S_n = 0$
- For hvilke værdier af n er $S_n > 0$ og for hvilke værdier af n er $S_n < 0$

4. Givet talrækken S_n

$S_n = 3 + 6 + 12 +.......+ 3 \cdot 2^{n-1}$

- Beregn S_n for n = 5
- Forklar, hvorfor S_n har en mindsteværdi
- Forklar hvorfor S_n ikke har en størsteværdi.

5. Givet talfølge a_n for hvilken det gælder

$a_n = \frac{1}{n}$

Talrækken S_n består af elemnt... a_n.

- Skriv a_n på listeform, id... fø... 4 elementer skrives som tal.
- Beregn S_1 , S_2 og S_3
- Kan S_n overstige ...
  Begrund dit sva...

6. Give... række... S_n

$S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + ...$

- Vis at $S_5 = 1,1111$
- Forklar, hvorfor S_n ikke kan blive 1,2.
- Forklar, hvorfor største-værdien for S_n er $\frac{10}{9}$.

Eksempel 2 Talrækken S består af summen af de ulige tal fra og med 1. Udfyld et skema som vist herunder:

n	1	2	3	4	5
S_n					

Angiv en regneforskrift, der udtrykker sammenhængen mellem n og S_n.
Find ved hjælp af regneforskriften S_{12}.

Løsning: $S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots..$

n	1	2	3	4	5
S_n	1	4	9	16	25

S_n kan findes ved at sætte n i 2. potens:

$S_n = n^2$

$S_{12} = 12^2 = 144$

Kommentar: Regneforskriften $S_n = n^2$ er fundet pr. intuition: "Det ser ud til at passe!"
Hvis man vil være sikker på at en regneforskrift fundet pr. intuition virkeligt passer for alle værdier af n, skal forskriften bevises. Se beviset for regneforskrifterne herover på side 19.

7. Talrækken S består af de lige tal fra og med 2

- Skriv S_n for n = 1 til n = 5
- Udfyld et skema, som vist herunder.

n	1	2	3	4	5
S_n					

- Angiv en regneforskrift, der udtrykker sammenhængen mellem n og S_n.
- Find ved hjælp af regneforskriften S_{20}.
- Vis med et eksempel, at formlen ikke gælder for en talrække bestående af de negative lige tal fra og med –2.

8. Givet talrækken S:

$S_n = 5 + 10 + 20 + 40 + \ldots\ldots.$

- Angiv en regne-forksrift for det n-te led.
- For hvilke værdier af n er $S_n > 200$?.

9. Talrækken S består af de naturlige tal. Følgeligt gælder:

$S_{10} = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots + 10$

- Beregn S_{10}.
- Forklar, hvorfor $S_{10} = 5 \cdot 11$
- Forklar, hvorfor $S_{20} = 10 \cdot 21$

Se formlen herunder:

$S_n = \frac{n}{2} \cdot (n + 1)$

- Forklar formlen.
  Brug eventuelt eksemplerne herover.
- Gælder formlen for alle værdier af n?

10. Tal følgen a_n er givet v[illegible]

$a_n = 2^n - n$

og S_n er betegnel[illegible] den [illegible]række, der kan dannes af a_n

- Skriv [illegible]
- Be[illegible]n S_4 og [illegible]
- Be[illegible] $S_5 - S_4$.
- Udfyld e[illegible]a, som vist herunder:

n	1	2	3	4	5
S_n					
S_{n+1}					
$S_{n+1} - S_n$					

- Kan du finde en sammenhæng mellem n og $S_{n+1} - S_n$?

Apendix

Bevis førelse

For at en formel har almen gyldighed skal der føres logisk bevis for den.

At føre logisk bevis vil sige,, at man med udgangspunkt i kendte regler og ved hjælp af kendte sammenhænge laver logiske følgeslutninger.

For at der kan siges at være ført bevis, skal tre ting være opfyldt:
De enkelte trin i beviset skal være logiske - det vil sige forståelige for ethvert menneske.
Følge-slutningerne skal være reversible: Det vil sige at de også er sande, når de "læses baglæns"
Resultatet skal kunne efterprøves.

Der findes to typer af følgeslutninger, som er vist med eksempler herunder:

(1) $2x = 10 \Leftrightarrow x = 5$
(2) $x = 5 \Rightarrow x > 3$

Følgeslutningen (1) er rigtig, både når den læses fra vestre mod højre og fra højre mod venstre. Dette er vist med dobbelt-pilen (kaldes en bi-implikati[illegible]

Følgeslutningen (2) er kun rigtig når den læses fra venstre m[illegible] højre. L[illegible] fra højre mod venstre står at hvis x > 3 så skulle det føre til at x = 5, [illegible]lket [illegible]er s[illegible]. I følgeslutningen (2) er derfor anvendt en enkelt-pil ([illegible]kelt i[illegible]kation).

Det er følgeslutninger som (1), der kan bruges [illegible] for en[illegible]mel.

Lidt historie

Selve ideén om at føre[illegible] bev[illegible]r en [illegible]mmenhæng har en lang tradition bag sig:

Fra skriftlige kil[illegible]d man, at [illegible]den har været anvendt lige så længe mennesker har skrevet. I vores del [illegible]rdenen er [illegible] specielt græske og arabiske tænkere, der har udviklet de metoder vi bruger i dag[illegible]

Ofte var motivet blot at find[illegible]sammenhænge mellem tal fordi det måske kunne lede frem til en forståelse af verdenens orden, men lige så ofte var motivet at kunne udføre beregninger, der skulle bruges til arkitektur eller astronomi.

Når vi i dag ser nogle af de metoder, de anvendte, kan vi blive forbavset over "hvordan fandt de på det!"

Svaret er nok, at de prøvede rigtigt mange forskellige metoder, og vi kender kun dén, som førte frem til det rigtige resultat.

På di næste sider vist to eksempler på logisk bevis. Det ene handler om en ren tal-række og har ingen praktisk betydning og den anden handler om rentesregning.

Eksempler på beviser

Herunder og på siden overfor er eksempler på to forskellige typer af beviser:

I det første eksempel er opgaven at bevise en formel, som man har erfaret ved en række af eksempler. Værdien af dette bevis er, at man derefter kan bruge formlen på alle eksempler – også eksempler, det er praktisk meget vanskeligt at efterregne.

I det andet eksempel er opgaven, at finde en formel, som man ikke umiddelbart kan se. Værdien af dette bevis, er at finde en simplere måde til udregning af en kompliseret sammenhæng.

Når man læser et logisk bevis, bør man sikre sig, at man forstår hvert enkelt trin i beviset. At "kunne" et matematisk bevis består af, at kunne forklare de enkelte trin.

Eksempel 1

På side 16 var et eksempel på en tal-række, der bestod af summen de ulige tal fra og med 0.

Ved efterprøvning med forskellige tal, viste det sig, at følgende sammenhæng tilsyneladende var gældende:

$S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots\ldots + (2n-1) = n^2$

For at kunne fastslå, at sammenhængen gælder for alle tal n, er det nødvendigt at føre bevis for dette.

Beviset består i at bevise to sætninger.

(I) Det vises at sammenhængen gælder for tallet 1

(II) Det vises at hvis sammenhængen gælder for et tal a, da gælder den også for a + 1

Til sammen medfører disse to sætninger, at når sammenhængen gælder for tallet 1, gælder den dermed også for 2, dermed også for 3 og så videre.

(I) $S_1 = 1 = 1^2$

[illegible] $1 = 1^2$ (I) bevist

(II) Sammenhængen antages at gælde for tallet a:

(1) $1 + 3 + 5 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (2a - 1) = a^2$

Og det skal vises at den også gælder for tallet a + 1:

På venstre side af lighedstegnet tilføjes det a+1-led og på højre side indsættes (a + 1) på a´s plads:

(2) $\underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (2a - 1)} + (2(a+1) - 1) = (a + 1)^2$

Ifølge (1) kan summen af de a første led skrives som a^2

$$a^2 + (2(a+1) - 1) = (a + 1)^2$$

$$a^2 + 2a + 1 - 1 = (a + 1)\cdot(a+1)$$

$$a^2 + 2a + 1 = a^2 + 2a + 1$$

(II) er dermed bevist.

Eksempel 2
Vi har set, at summen af nogle talrækker, kan udtrykkes ved hjælp af en formel. Dette kan udnyttes i praktiske situationer som f. eks. ved annuitets-regning:

Annuitetsregning beskæftiger sig med den situation, at man et aftalt andet gange n indbetaler en ydelse y på en konto, der giver r i rente. Læs eventuelt mere i Penge 2..

Den samlede værdi A_n af indbetalingerne umiddelbart efter indbetaling af den sidste ydelse og renterne af alle indbetalingerne kan beregnes, som en talrække:

(1) $A_n = \underbrace{y(1+r)^0}_{\text{n. - indbetaling}} + y(1+r)^1 + y(1+r)^2 + \ldots\ldots + \underbrace{y(1+r)^{n-1}}_{\text{1. indbetaling}}$

Ved hjælp af regneregler for ligninger og regler om reduktion af bogstav-udtryk vil vi omdanne dette ikke endelige udtryk, til et endeligt udtryk.

Først ganges ,der med (1 + r) på begge sider af lighedstegnet og dermed dannes ligningen (2):
(2) $A_n \cdot (1 + r) = [y(1+r)^0 + y(1+r)^1 + y(1+r)^2 + \ldots\ldots +$ y([illegible])$^{n-1}$]([illegible])
(2) $A_n \cdot (1 + r) = y(1+r)^1 + y(1+r)^2 + y(1+r)^3 + \ldots\ldots +$ y(1+r[illegible]

Fra ligningen (2) trækkes ligningen (1) og derved da[illegible]
(2) $A_n \cdot (1 + r) = y(1+r)^1 +$ y(1+[illegible] …[illegible]….+ $y(1+r)^n$
(1) $A_n = y(1+r)^0 + y(1+r)^1 +$ y(1[illegible] …+ y([illegible]r)$^{n-1}$
(3) $A_n \cdot (1 + r) - A_n = -y(1+r)^0 + y(1+r)^n$

(3) består af et endeligt antal led og k[illegible]cere[illegible]
$A_n \cdot (1 + r) - A_n = -y(1+r)^0 +$ y(1[illegible]
$A_n \cdot ((1 + r) - 1)) = -y + y(1+r)^n$
$A_n \cdot r = -y + y(1+r)^n$ [illegible]
$A_n \cdot r = y(1+r)^n -$ [illegible]
$A_n \cdot r = y \cdot ((1+r)$[illegible]

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - \ldots}{r}$$

Og hermed er der ført logisk bevis for en formel, der kan bruges til at beregne værdien af en opsparing, hvor der indbetales y, n på hinanden følgende terminer, når renten er r.